

15. Script zur Vorlesung: Algebra (B III)

Prof. Dr. Salma Kuhlmann, Gabriel Lehericy, Simon Müller

WS 2016/2017: 16. Dezember 2016

Satz 1

Sei $H = \langle x \rangle$ zyklisch

- (1) Sei $K \leq H$, dann ist K zyklisch.
- (2) Wenn $|H| = \infty$, dann sind $\langle x^j \rangle \neq \langle x^i \rangle$ für $i \neq j$ und $\{\langle x^i \rangle \mid i \in \mathbb{N}_0\}$ ist die Menge aller Teilgruppen von H . (Übungsaufgabe).
- (3) Wenn $|H| = n < \infty$ und $a \in \mathbb{N}$ mit $a|n$, dann gibt es eine eindeutige Teilgruppe der Ordnung a , nämlich $\langle x^{n/a} \rangle$ und $\{\langle x^d \rangle \mid d|n\}$ ist die Menge aller Teilgruppen von $H \neq \{1\}$.

Beweis

- (1) $K = \{1\}$ ist zyklisch, also ohne Einschränkung $K \neq \{1\}$.

Sei $k \in \mathbb{N}$ die kleinste, so dass $x^k \in K$. Also ist $\langle x^k \rangle \leq K$.

Sei $x^a \in K$; $DA \Rightarrow a = qk + r$ mit $0 \leq r < k$ und $x^r = x^a x^{-qk} \in K$.

Da k minimal gewählt ist, muss $r = 0$ sein. Also $a = qk$ und $x^a = (x^k)^q \in \langle x^k \rangle$.

Also $K \leq \langle x^k \rangle$.

- (3) Sei $d := \frac{n}{a}$, also $d|n$ und $|x^d| = \frac{n}{\text{ggT}(n,d)} = n/d = n/(n/a) = a$. Somit ist $|\langle x^d \rangle| = a$.

Eindeutigkeit: Sei $K \leq H$ mit $|K| = a$ und $b \in \mathbb{N}$ kleinste, so dass $K = \langle x^b \rangle$. Wir berechnen $\frac{n}{d} = a = |K| = |x^b| = \frac{n}{\text{ggT}(n,b)}$. Daraus folgt $d = \text{ggT}(n,b)$, insbesondere $d|b$. Also $x^b \in \langle x^d \rangle$ und $K = \langle x^b \rangle \leq \langle x^d \rangle$.

Da aber $|K| = a = |\langle x^d \rangle|$, folgt nun $K = \langle x^d \rangle$. □

Proposition 2

Sei \mathcal{A} eine nichtleere Menge von Teilgruppen, dann ist $\bigcap \mathcal{A}$ auch eine Teilgruppe.

Beweis

Setze $K := \bigcap \mathcal{A}$; $a, b \in K \Rightarrow ab^{-1} \in A$, für alle $A \in \mathcal{A}$ (weil $A \leq H$), also $ab^{-1} \in K$ und damit $K \leq H$. □

Definition 1

Sei $S \subseteq H$ eine Untermenge; $\mathcal{A} := \{K \leq H; S \subseteq K\}$.

Definiere $\langle S \rangle = \bigcap \mathcal{A}$. $\langle S \rangle$ ist die (für die Inklusion) kleinste Teilgruppe von H , die S enthält. $\langle S \rangle$ heißt die *Teilgruppe, die von S erzeugt ist*.

Konvention: $\langle \emptyset \rangle = \{1\}$

Notation: $S = \{a_1, \dots, a_n\}; \langle S \rangle = \langle a_1, \dots, a_n \rangle$ (wenn S endlich ist).

Proposition 3

Sei $S \neq \emptyset$. $\langle S \rangle = \{a_1^{\varepsilon_1} \dots a_n^{\varepsilon_n}; n \in \mathbb{N}; a_i \in S; \varepsilon_i = \pm 1\}$.

Beweis

Übungsaufgabe zu zeigen: Diese Menge ist eine Teilgruppe. Sie enthält S und muss in jeder Teilgruppe, die S enthält enthalten sein. \square

Spezialfall: Wenn H abelsch. (Übungsaufgabe, Übungsblatt).

Proposition 4

Sei $\varphi : G \rightarrow H$ ein Homomorphismus. Es gelten

$$(1) \varphi(1) = 1$$

$$(2) \varphi(g^{-1}) = \varphi(g)^{-1}$$

$$(3) \varphi(g^n) = \varphi(g)^n \text{ für alle } n \in \mathbb{Z}$$

$$(4) \ker \varphi := \{g \in G; \varphi(g) = 1\} \leq G$$

$$(5) \operatorname{im} \varphi := \{h \in H; \exists g \in G : \varphi(g) = h\} \leq H$$

Wir wollen Faktorengruppen definieren.

Definition 2

Sei $H \leq G$ und $g \in G$.

$gH := \{gh \mid h \in H\}$ ist die linke Nebenklasse von g bezüglich H und $Hg := \{hg \mid h \in H\}$ ist die rechte Nebenklasse.

Additive Notation: $g + H$ und $H + g$

Proposition 5

Sei $H \leq G$. Es gelten:

$$(1) \text{ Die Menge der linken Nebenklassen bilden eine Partition von } G \text{ i.e. } G = \bigcup_{g \in G} gH$$

$$\text{und } uH \cap vH \neq \emptyset \Rightarrow uH = vH.$$

$$(2) \text{ Für alle } u, v \in G : uH = vH \Leftrightarrow v^{-1}u \in H.$$

Beweis

- (1) $1 \in H$, also $g \in gH$ für alle $g \in G$. Also $G = \bigcup gH$. Sei $uH \cap vH \neq \emptyset$. Sei $x \in uH, x \in vH$, also $x = uh_1 = vh_2$ für geeignete $h_1, h_2 \in H$. Also $u = v \underbrace{h_2 h_1^{-1}}_{\in H}$.

Sei $t \in H$. Es gilt also $ut = v(h_2 h_1^{-1}t) = v(h_2 h_1^{-1}t) \in vH$, so dass $uH \subseteq vH$.

Analog: $uH \supseteq vH$.

- (2) $uH = vH$ genau dann, wenn $u \in vH$ genau dann, wenn $u = vh$ für ein $h \in H$ genau dann, wenn $v^{-1}u \in H$. \square

Proposition 6

Sei $N \leq G$. Die Verknüpfung

$$(uN)(vN) := (uv)N$$

ist wohldefiniert genau dann, wenn

$$ghg^{-1} \in N \text{ für alle } g \in G; \text{ für alle } h \in N \quad (*)$$

Beweis

“ \Rightarrow ” Wohldefiniert \rightarrow

$$\left. \begin{array}{l} u, u_1 \in uN \\ v, v_1 \in vN \end{array} \right\} \Rightarrow (uv)N = (u_1v_1)N$$

Sei $g \in G, n \in N$, dann setze $u = 1, v = g^{-1}, u_1 = n, v_1 = g^{-1} \Rightarrow 1g^{-1}N = ng^{-1}N$ i.e. $g^{-1}N = ng^{-1}N$.

Nun: $ng^{-1} \in ng^{-1}N$, also $ng^{-1} \in g^{-1}N$. Also $ng^{-1} = g^{-1}n_1$ für geeignetes $n_1 \in N$. Also $gn_1g^{-1} = n_1 \in N$.

“ \Leftarrow ” Sei $u, u_1 \in uN, v, v_1 \in vN$. Zu zeigen: $(uv)N = (u_1v_1)N$.

Schreibe $u_1 = un, v_1 = vm; n, m \in N$. Wir zeigen: $u_1v_1 \in (uv)N$.

Wir berechnen: $u_1v_1 = (un)(vm) = u(vv^{-1})nvm = uv \underbrace{(v^{-1}nv)}_{:=n_1 \in N} m = uvn_1m = uv \underbrace{(n_1m)}_{\in N} \square$

Zusatz zu Proposition 6

Wenn wohldefiniert, dann definiert die Verknüpfung $(uN)(vN) := (uv)N$ eine Gruppenoperation auf die Menge der linken Nebenklassen. (Übungsaufgabe).

Definition

Sei $N \leq G$. N ist normal, falls (*) in Proposition 6 gilt. Schreibe $N \triangleleft G$.

Beispiel

Sei φ ein Homomorphismus. $N := \ker \varphi$ ist normal, weil

$$\varphi(gng^{-1}) = \varphi(g)\varphi(n)\varphi(g^{-1}) = \varphi(g)\varphi(g)^{-1} = 1.$$

Also $gng^{-1} \in N$ für alle $g \in G$ und $n \in N$.

Umgekehrt: Sei G/N die Gruppe der linken Nebenklassen für ein $N \triangleleft G$.

Proposition 7

$$\varphi: G \rightarrow G/N$$

$$g \mapsto gN$$

ist ein surjektiver Gruppenhomomorphismus mit $\ker \varphi = N$.