Inhaltsverzeichnis zur Vorlesung: Algebra (BIII)

Prof. Dr. Salma Kuhlmann, Gabriel Lehéricy, Simon Müller

Wintersemester 2016/2017[1]

[1] Die Seitenzahlen in Klammern geben die Seitenzahl für die Suche mit Adobe Acrobat Reader an (unter dem Menü ANZEIGE – GEHE ZU – SEITE).

1. Script zur Vorlesung: Algebra (B III)

Prof. Dr. Salma Kuhlmann, Gabriel Lehéricy, Simon Müller

WS 2016/2017: 25. Oktober 2016

Kapitel 1

Faktorringe, Homomorphismen, Ideale, Ringe von Brüchen, Quotientenkörper, Lokalisierung, Chinesischer Reste-Satz, Euklidische und Hauptideal Ringe, Faktorielle Ringe, Polynom-Ringe, Irreduzibilitätskriterien

Alle Ringe in dieser Vorlesung sind kommutativ mit $1 \neq 0$.

Erinnerungen

Sei R ein Ring.

(1) $a \neq 0; a \in R$ ist ein *Nullteiler*, wenn es $b \neq 0; b \in R$ gibt mit $ab = 0$.

(2) R ist ein *Integerring* oder *Integritätsbereich*, wenn er keine Nullteiler hat.

(3) Ein endlicher Integritätsbereich ist ein Körper (siehe Übungsblatt).

(4) $u \in R$ ist eine Einheit, wenn es ein $v \in R$ gibt mit $uv = 1$.

Notation: $R^\times :=$ Menge der Einheiten von R.

Proposition

$R^\times$ ist eine multiplikative Gruppe.

Beispiele

$\mathbb{Z}_n^\times = U(n)$ (siehe Übungsblatt)

$a \in U(n) \Leftrightarrow \text{ggT } (a, n) = 1.$

Euler φ-Funktion: $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

$\varphi(n) := \mid U(n) \mid.$

Siehe Übungsblatt für eine ausführliche Ausarbeitung der Eigenschaften von φ:

(1) $\varphi(p^v) = p^v - p^{v-1}$ für p Primzahl und $v \in \mathbb{N}$

(2) φ ist eine multiplikative arithmetische Funktion i.e. $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$, wenn $\text{ggT } (a, b) = 1$.

Definition

(1) $S \subseteq R$ ist ein *Teilring*, wenn $S \neq \emptyset; a, b \in S \Rightarrow a - b \in S$ und $ab \in S$.

(2) Seien R, S Ringe. $\varphi : R \to S$ ist ein *Ringhomomorphismus*, wenn
$\varphi(1_R) = 1_S, \varphi(a + b) = \varphi(a) + \varphi(b), \varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$.
Notation:
$\ker \varphi := \{x \in R; \varphi(x) = 0\}$
$\text{im } \varphi := \{y \in S; \exists x \in R \text{ mit } \varphi(x) = y\} := \varphi(R)$.

(3) Ein *Ringisomorphismus* ist ein bijektiver Ringhomomorphismus.
Notation: $\varphi : R \simeq S$ oder $R \overset{\varphi}{\simeq} S$ oder $R \simeq S$.

Bemerkung

Sei φ ein Homomorphismus: φ ist injektiv $\Leftrightarrow \ker \varphi = \{0\}$.

Beispiel

Sei $n \in \mathbb{N}$
$a \in \mathbb{Z}; \overline{a} :=$ Rest nach Division durch n.

$$\begin{array}{rccc} \varphi: & \mathbb{Z} & \to & \mathbb{Z}_n \\ & a & \mapsto & \overline{a} \end{array}$$

ist ein Ringhomomorphismus mit $\ker \varphi = \{nz / z \in \mathbb{Z}\} := n\mathbb{Z}$
(siehe Lineare Algebra 1, 2. Vorlesung).

Definition

Ein Teilring $I \subseteq R$ ist ein *Ideal*, wenn aus $r \in R$ und $x \in I$ folgt: $rx \in I$.
Notation: $I \lhd R$

Beispiele

$I = R$ und $I = \{0\}$

Terminologie

$I \lhd R$ und $I \neq R$ heißt *echtes Ideal*.
$I \lhd R$ und $I \neq \{0\}$ heißt *nicht triviales Ideal*.

Proposition

Sei $\varphi : R \to S$ ein Ringhomomorphismus. Es gelten:

(1) $\text{im } \varphi$ ist ein Teilring von S.

(2) $\ker \varphi$ ist ein Ideal von R.

Faktorring

Sei $I \lhd R$. $R/I := \{x+I \mid x \in R\}$ die Menge der *Nebenklassen von R modulo I* (siehe Übungsblatt) (also der Äquivalenzklassen $[x]$ bezüglich $x \sim y \bmod I$ genau dann, wenn $x - y \in I$).

Proposition

R/I ist ein Ring mit den Ringoperationen
$(r + I) + (s + I) := (r + s) + I$ und
$(r + I) \cdot (s + I) := (rs) + I$
für alle $r, s \in R$ (siehe Übungsblatt).

Definition

R/I ist der *Faktorring* "$R \mod I$".

Satz (Isomorphiesatz für Ringe)

(1) Sei $\varphi : R \to S$ ein Ringhomomorphismus. Es gilt $R/\ker\varphi \simeq \operatorname{im}\varphi$.

(2) Umgekehrt: Ist $I \lhd R$, dann ist

$$\begin{array}{rccc} \pi: & R & \to & R/I \\ & r & \mapsto & r+I \end{array}$$

ein surjektiver Ringhomomorphismus mit $\ker\pi = I$ (π ist die *kanonische Projektion*).

Also sind die Ideale genau die Kerne von Ringhomomorphismen.

Beweis

Setze $I := \ker\varphi$.

Behauptung die Abbildung von (1)

$$\begin{array}{rccc} \Phi: & R/I & \twoheadrightarrow & \varphi(R) \\ & x+I & \mapsto & \varphi(x) \end{array}$$

ist wohldefiniert (i.e. $x + I = y + I$ impliziert $\varphi(x) = \varphi(y)$).

Es ist klar, dass Φ surjektiv und ein Ringhomomorphismus ist. Wir berechnen $\ker\Phi$.

$\Phi(x + I) = 0 \Leftrightarrow \varphi(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \ker\varphi \Leftrightarrow x \in I \Leftrightarrow x + I = 0 + I$;

somit ist $\ker\Phi = \{0 + I\}$ (das Nullelement der Faktorring R/I).

Beweis von (2) analog. □

Beispiel

$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}_n$

Korollar 1

Sei $I \lhd R, J \lhd R$ mit $I \subseteq J$ (insbesondere $I \lhd J$). Dann ist $J/I \lhd R/I$ und $(R/I)/(J/I) \simeq R/J$.

Beweis

Die Abbildung

$$\begin{array}{rccc} \Phi: & R/I & \twoheadrightarrow & R/J \\ & x+I & \mapsto & x+J \end{array}$$

ist ein surjektiver Ringhomomorphismus mit $\ker \Phi = J/I$. $\square$

2. Script zur Vorlesung: Algebra (B III)

Prof. Dr. Salma Kuhlmann, Gabriel Lehéricy, Simon Müller

WS 2016/2017: 28. Oktober 2016

Korollar
Sei $I \lhd R$. Betrachte die Teilringe A von R mit $I \subseteq A \subseteq R$ einerseits und die Teilringe von R/I andererseits.
Die Abbildung

$$A \mapsto A/I$$

ist bijektiv und respektiert Inklusion. Ferner gilt für $I \subseteq A \subseteq R$, dass $A \lhd R$ genau dann, wenn $A/I \lhd R/I$.

Beweis
Siehe Übungsblatt. □

Notation
$x + I$ wird manchmal auch als $\overline{x}$ geschrieben.

Definition
Sei $A \subseteq R$ eine beliebige Teilmenge. Das *von A erzeugte Ideal* ist das kleinste Ideal, das A enthält (und wird mit $< A >$ bezeichnet), e.g. $< \emptyset >= \{0\}$.

Bemerkung (Übungsaufgabe)

$$< A > \quad = \quad \bigcap_{\{A \subseteq J \lhd R\}} J$$

(ist der Durchschnitt aller Ideale, die A enthalten) und außerdem ist

$$< A >= \{\sum_{i=1}^{n} r_i a_i \ / n \in \mathbb{N}; r_i \in R; a_i \in A\}$$

(also die Menge aller endlichen R-Linearkombinationen aus Elementen von A).
Konvention: Wenn $A = \{a_1, \ldots, a_l\}$ endlich ist, so schreiben wir einfach $< a_1, \ldots, a_l >$.

Definition
Sei $a \in R$. $< a >= \{ra; r \in R\}$ heißt *Hauptideal*, das von a erzeugt ist.

Beispiel
$< 1 >= R$ und $< 0 >= \{0\}$.

Proposition
Sei $I \lhd R$

(1) $I = R$ genau dann, wenn $I \bigcap R^\times \neq \emptyset$

(2) R ist ein Körper genau dann, wenn die einzigen Ideal R und $\{0\}$ sind.

Beweis

(1) "$\Rightarrow$" trivial

"$\Leftarrow$" $u \in I$ Einheit $\Rightarrow$ $u^{-1}u \in I$ $\Rightarrow$ $1 \in I$

$\uparrow$

$\in R$ $\Rightarrow$ $r.1 \in I \; \forall \; r \in R$

(2) "$\Rightarrow$" Sei $I \neq \{0\}$ und $u \in I; u \neq 0$. Dann ist u eine Einheit und somit $I = R$.

"$\Leftarrow$" Sei $x \in R, x \neq 0$. Dann ist $< x >= R$, d.h. $1 \in < x >$, also existiert ein $r \in R$ mit $rx = 1$, also $r = x^{-1}$

□

Korollar
Sei R ein Körper , S ein Ring und $\varphi : R \to S$ ein Ringhomomorphismus. Ist $\varphi \neq 0$, dann ist φ injektiv.

Beweis
$\ker \varphi = \{0\}$. □

Definition
$M \lhd R$ ist *maximal*, wenn

(i) $M \neq R$ (M ist echt).

(ii) Ist $I \lhd R$ mit $M \subseteq I \subseteq R$,

dann gilt: $I = M$ oder $I = R$. (Also gibt es keine weiteren Ideale strikt zwischen M und R.)

Proposition
Jedes echte Ideal ist in einem Maximalideal enthalten.

Wir brauchen Zorn's Lemma.

Exkurs **Partielle Ordnung**

Sei $A \neq \emptyset$ eine Menge. Eine *partielle Ordnung* auf A ist eine Relation $\leq$ auf A mit den Eigenschaften:

(1) $x \leq x$ für alle $x \in A$.

(2) Aus $x \leq y$ und $y \leq x$ folgt $x = y$ für alle $x, y \in A$.

(3) Aus $x \leq y$ und $y \leq z$ folgt $x \leq z$ für alle $x, y, z, \in A$.

(4) $\leq$ ist *total* falls $x \leq y$ oder $y \leq x$ für alle $x, y \in A$.

Definition

(*i*) Sei $(A, \leq)$ eine partielle Ordnung und $B \subseteq A$. Ein Element $a \in A$ heißt *obere Schranke* für B in A, falls $b \leq a$ für alle $b \in B$.

(*ii*) $m \in A$ heißt *maximal*, wenn gilt: $m \leq x \Rightarrow m = x$ für alle $x \in A$.

Zorn's Lemma

Sei $A \neq 0$ eine partielle Ordnung mit der Eigenschaft: Jede total angeordnete Teilmenge $B \subseteq A$ hat eine obere Schranke in A. Dann hat A ein maximales Element.

Beweis der Proposition

Sei $I \lhd R$, $I \subsetneq R$. Betrachte

$S :=$ die Menge aller echten Ideale von R, die in I enthalten sind.

$I \in S$, so $S \neq \emptyset$.

S ist partiell geordnet durch Mengeninklusion. Wir behaupten, dass jede total geordnete Teilmenge von S eine obere Schranke in S hat. Sei also $\xi \subseteq S$ eine solche. Setze

$$J := \bigcup_{c \in \xi} C$$

J ist Ideal: $0 \in J$. Seien $a, b \in J$, existieren $C_1, C_2 \in \xi$ mit $a \in C_1$ und $b \in C_2$.

Nun gilt $C_1 \subseteq C_2$ oder $C_2 \subseteq C_1$ (weil ξ total geordnet ist).

In jedem Fall ist $a + b \in J$ (weil $a + b \in C_1$ oder $a + b \in C_2$).

Analog zeigt man: $a \in J$ und $r \in R \Rightarrow ra \in J$.

Nun zeigen wir: $J \subsetneq R$, sonst $1 \in J$, also $1 \in C$ für ein geeignetes $C \in \xi$ - Widerspruch, weil $C \in \xi$ echt sein muss.

Anwendung von Zorn's Lemma ergibt:

S hat maximale Elmente. Wenn M ein solches ist, dann ist klar, dass M ein maximales Ideal ist, welches I enthält, wie behauptet. $\square$

3. Script zur Vorlesung: Algebra (B III)

Prof. Dr. Salma Kuhlmann, Gabriel Lehéricy, Simon Müller

WS 2016/2017: 4. November 2016

Proposition
$M \lhd R$ ist maximal genau dann, wenn R/M ein Körper ist.

Beweis
M ist maximal, denau dann, wenn $M \subsetneq R$ und es keine Ideale A gibt mit

$$M \subsetneq A \subsetneq R$$

d.h. genau dann, wenn R/M nur $M/M = \{0\}$ und R/M als Ideale hat. Nun erste Proposition aus der 2. Vorlesung anwenden. □

Beispiel
$n\mathbb{Z} \lhd \mathbb{Z}$ ist maximal genau dann, wenn $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \backsimeq \mathbb{Z}_n$ ein Körper ist, genau dann, wenn $n = p$ eine Primzahl ist (Lineare Algebra I, 3. Vorlesung).

Definition
$P \lhd R$ ist ein Primideal, wenn

(1) P echt ist, i.e. $P \subsetneq R$.

(2) Aus $ab \in P$ $(a, b, \in R)$ folgt $a \in P$ oder $b \in P$.

Beispiel
$\{0\} \neq p\mathbb{Z} \lhd \mathbb{Z}$ ist Primideal genau dann, wenn p eine Primzahl ist.

Proposition
$P \lhd R$ ist Primideal genau dann, wenn R/P ein Integritätsbereich ist.

Beweis
seien $a, b, \in R$ und $P \lhd R$. Dann ist P Primideal genau dann,
wenn $[\overline{ab} = \overline{a}\overline{b} = 0 \Rightarrow \overline{a} = \overline{0}$ **oder** $\overline{b} = \overline{0}]$ ($\overline{a} = \overline{0}$ bedeutet $a \in P$) genau dann, wenn R/P integer ist. □

Korollar
Jedes maximale Ideal ist Primideal.

Definition

(1) Seien R, S Ringe. Wir definieren Ringoperationen auf $R \times S$ (koordinatenweise).

$$\left.\begin{array}{rcl} (r_1, s_1) + (r_2, s_2) & := & (r_1 + r_2, s_1 + s_2) \\ (r_1, s_2) \times (r_2, s_2) & := & (r_1 r_2, s_1 s_2) \end{array}\right\} \text{ für alle } r_1, r_2 \in R \text{ und } s_1, s_2 \in S$$

$R \times S$ heißt *Ringprodukt*.

(2) $A, B \lhd R$ sind *teilerfremd*, wenn $A + B = R$ (wobei $A + B := \{a + b; a \in A, b \in B\}$).

Satz (Chinesischer Reste-Satz)
Seien $A_1, \ldots, A_k \lhd R$. Die Abbildung

$$\begin{array}{rccl} \varphi: & R & \to & \prod_{i=1}^{k}(R/A_i) \\ & r & \mapsto & (r + A_1, \ldots, r + A_k) \end{array}$$

ist ein Ringhomomorphismus mit $\ker \varphi = \bigcap_{i=1}^{k} A_i$.

wenn A_i, A_j teilerfremd sind für alle $i \neq j$, dann ist φ surjektiv. In diesem Fall gilt also (Isomorphiesatz):

$$R/\bigcap_{i=1}^{k} A_i \simeq \prod_{i=1}^{k}(R/A_i).$$

Beweis
Ohne Einschränkung $k = 2$. Prüfe, ob $\varphi(r_1 + r_2) \stackrel{?}{=} \varphi(r_1) + \varphi(r_2)$.

$$\begin{array}{rcl} \varphi(r_1 + r_2) & = & ((r_1 + r_2) + A_1, (r_1 + r_2) + A_2) \\ & = & ((r_1 + A_1) + (r_2 + A_1), (r_1 + A_2) + (r_2 + A_2)) \\ & = & ((r_1 + A_1), r_1 + A_2)) + ((r_2 + A_1), (r_2 + A_2)) \\ & = & \varphi(r_1) + \varphi(r_2) \end{array}$$

usw.
Also ist φ ein Ringhomomorphismus.

$$\begin{array}{rcl} \ker \varphi & = & \{r | \varphi(r) = 0\} \\ & = & \{r | \varphi(r) = (A_1, A_2)\} \\ & = & \{r | r \in A_1 \text{ und } r \in A_2\}. \end{array}$$

Sei nun $A_1 + A_2 = R$. Also existieren $x \in A_1$ und $y \in A_2$ mit $x + y = 1$, insbesondere $\varphi(x) = (0, 1)$ und $\varphi(y) = (1, 0)$.

Sei nun $(r_1 + A_1, r_2 + A_2) \in R/A_1 \times R/A_2$ beliebig.
Setze $r := r_2x + r_1y$ und berechne:

$$\begin{aligned} \varphi(r) &= \varphi(r_2x + r_1y) \\ &= \varphi(r_2)\varphi(x) + \varphi(r_1)\varphi(y) \\ &= (r_2 + A_1, r_2 + A_2)(0,1) + (r_1 + A_1, r_1 + A_2)(1,0) \\ &= (0, r_2 + A_2) + (r_1 + A_1, 0) \\ &= (r_1 + A_1, r_2 + A_2). \end{aligned}$$

Also ist φ surjektiv. □

Bruchringe

Definition
$D \subseteq R$ ist multiplikativ, falls $1 \in D$ und $st \in D$ für alle $s, t \in D$.

Beispiele
(*i*) $D = R^\times$

(*ii*) $D = R\backslash P$ mit $P \lhd R$ Prim.

Sei nun D multiplikativ, ohne Nullteiler, $0 \notin D$ (*). Definiere eine Relation $\sim$ auf $R \times D$:
$(r, d) \sim (r', d') \Leftrightarrow rd' = dr'$.
$\sim$ ist Äquivalenzrelation

$$\begin{array}{llllllll} (\text{e.g.} & (r,d) & \sim & (s,e) \\ \text{und} & (s,e) & \sim & (t,f) \end{array} \left| \begin{array}{l} \\ \Rightarrow + \end{array} \right. \begin{array}{llllll} re & - & sd & = & 0 \\ sf & - & te & = & 0 \end{array} \left| \begin{array}{l} \times f \\ \times d \end{array} \right. \text{ ergibt } (rf - td)e = 0,$$

e ist kein Nullteiler $e \neq 0$. Also muss $rf - td = 0$ sein und damit $rf = td$.
Also $(r, d) \sim (t, f)$).

Notation
Schreibe $\frac{r}{d} := [(r, d)]$ (die Äquivalenzklasse von (r, d)) und setze $D^{-1}R :=$ die Menge der Äquivalenzklassen.
Versehe $D^{-1}R$ mit den folgenden Ringoperationen:

$$\frac{r_1}{d_1} + \frac{r_2}{d_2} := \frac{r_1d_2 + r_2d_1}{d_1d_1} \quad \text{und} \quad \frac{r_1}{d_1} \cdot \frac{r_2}{d_2} := \frac{r_1r_2}{d_1d_2}.$$

4. Script zur Vorlesung: Algebra (B III)

Prof. Dr. Salma Kuhlmann, Gabriel Lehéricy, Simon Müller

WS 2016/2017: 8. November 2016

Behauptung
$D^{-1}R$ ist ein Ring mit Null $\frac{0}{1}$ und Eins $\frac{1}{1}$.

Beweis
Wir zeigen zum Beispiel, dass die Addition wohldefiniert ist.
Zu zeigen: $\frac{ad+bc}{bd} = \frac{a'd'+b'c'}{b'd'}$.

Seien

$$\begin{array}{ccc} \frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} & \text{und} & \frac{c}{d} = \frac{c'}{d'} \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ ab' = a'b & & cd' = c'd \\ (ad+bc)b'd' & \stackrel{?}{=} & (a'd'+b'c')(bd) \\ \text{berechne} & & \text{berechne} \\ \shortparallel & & \shortparallel \\ \underline{ab'}dd' + \underline{\underline{cd'}}bb' & = & \underline{a'b}dd' + \underline{\underline{c'd}}bb' \end{array}$$

usw.... □

Behauptung
Die Abbildung

$$\begin{array}{rccc} i: & R & \to & D^{-1}R \\ & r & \mapsto & \frac{r}{1} \end{array}$$

definiert einen injektiven Ringhomomorphismus.

Beweis
$i(r) = 0 \Leftrightarrow \frac{r}{1} = \frac{0}{1} \Leftrightarrow r = 0$ □

Behauptung
$i(D) \subset (D^{-1}R)^\times$.

Beweis
$d \in D$; $i(d) = \frac{d}{1}$ und damit $[i(d)]^{-1} = \frac{1}{d}$ □

Definition
$D^{-1}R$ ist der Ring von Brüchen.

Beispiel 1
R ist integer $\Rightarrow D := R\backslash\{0\}$ erfüllt $(*)$ und so ist $D^{-1}R$ ein Körper, den wir mit Quot (R) bezeichnen.
Wir identifizieren R mit $i(R)$ (i.e. r mit $\frac{r}{1}$ für alle $r \in R$).
Wir haben erreicht: Jeder Integritätsbereich lässt sich in einen Körper einbetten.
(Erinnerung: Ein injektiver Ringhomomorphismus heißt eine Einbettung.)

Korollar
Der Ring R läßt sich in einen Körper einbetten genau dann, wenn er integer ist.

Beispiel 1
(a) Quot $(\mathbb{Z}) = \mathbb{Q}$

(b) Quot $(K[x]) := K(x)$

der rationale Funtkionenkörper einer Variablen über den Körper K.

Beispiel 2
P ist ein Primideal; $D = R \setminus P$.
$R_P = D^{-1}R$ ist die Lokalisierung von R nach P.

Zu Beispiel 1 (b): Polynomringe über Ringe
Sei R ein kommutativer Ring mit Eins.

$R[x] := \{p(x) \mid p(x) \text{ Polynom über } R\}$

$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a, x + a_0$

$n \in \mathbb{N}_0 \left[\begin{array}{rcl} 0 \neq a_n & := & \text{Leitkoeffizient} \\ \deg p & := & n \end{array} \right.$

Addition: Kooridnatenweise (koeffizientenweise)
Multiplikation: Wenn
$p(x) = \sum a_i x^i \quad$ und $\quad q(x) = \sum b_j x^j$,
so ist der Koeffizient von x^k im Produkt $p(x)q(x)$ gleich $\sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}$.

Bemerkungen:
$R \subseteq R[x]$ als Teilring der konstanten Polynome (i.e. Polynome p mit $\deg p = 0$).

Frage
Wann ist $a_m b_m$ Leitkoeffizient vom Produkt $p(x)q(x)$?

Korollar

R ist integer genau dann, wenn $R[x]$ integer ist.

Beweis

"$\Leftarrow$" Ein Teilring von einem Integritätsbereich ist integer.

"$\Rightarrow$" Sei $a_n \neq 0$ und $b_m \neq 0$ für $p(x) = a_n x^n + \cdots + a_o$ und $q(x) = b_m x^m + \cdots + b_o$, dann ist $a_n b_m \neq 0$, weil R integer ist (und damit ist auch $\deg p(x)q(x) = n + m$). Insbesondere ist $p(x)q(x)$ nicht das Nullpolynom. $\square$

Beispiel

Sei R ein Ring. Betrachte die Abbildung

$$\begin{array}{rccc} ev_0: & R[x] & \twoheadrightarrow & R \\ & p(x) & \mapsto & p(0) \quad = \quad \text{der konstante Term von } p(x). \end{array}$$

Dann ist ev_0 ein surjektiver Ringhomomorphismus mit $\ker ev_0 :=$ die Menge der Polynome mit konstantem Term gleich Null.

Also ist $R[x]/ < x > \backsimeq R$, wobei $\ker ev_0 =< x >= \{xf(x); f(x) \in R[x]\}$

Sei nun $R = \mathbb{Z}$, so ist $\mathbb{Z}[x]/ < x > \backsimeq \mathbb{Z}$.

Wir sehen also: $< x >$ ist ein Primideal in $\mathbb{Z}[x]$, aber ist nicht maximal !

5. Script zur Vorlesung: Algebra (B III)

Prof. Dr. Salma Kuhlmann, Gabriel Lehéricy, Simon Müller

WS 2016/2017: 11. November 2016

Euklidische Bereiche

Definition

(1) Eine Abbildung $N : R \to \mathbb{N}_0$ heißt *Norm*.

(2) Der Integritätsbereich R (mit der Norm N versehen) heißt *euklidisch*, wenn für alle $a, b \in R$ mit $b \neq 0$ $q, r \in R$ existieren, so dass $a = qb + r$, wobei $r = 0$ oder $N(r) < N(b)$.

Abkürzung: R ist E.R.

Beispiele

(*i*) $\mathbb{Z}$ mit $N(a) := |a|$

(*ii*) $K[x]$, wenn K *ein Körper* mit $N(p(x)) := \deg p(x)$ ist.

Weitere Beispiele: Siehe Übungsblatt.

Proposition

Sei R ein euklidischer Integritätswbereich, $I \lhd R$, dann ist I ein Hauptideal.

Beweis

Sei $I \neq \{0\}$ und $0 \neq d \in I$ mit $N(d)$ minimal. Es ist klar, dass $< d > \subseteq I$ (siehe (i) unten bei Definition).
Umgekehrt: Sei $a \in I$ und $q, r \in R$ mit $a = qd + r \qquad r = 0$ oder $N(r) < N(d)$.
Nun ist aber $r = a - qd \in I$, also $N(r) < N(d)$ unmöglich.
Also $r = 0$ und somit $a = qd \in < d >$. □

Teilbarkeit

Definition
$a, b \in R; b \neq 0$

(*i*) b *teilt* a; $b|a$ (Bezeichnung), wenn ein $x \in R$ existiert mit $a = bx$.

(*ii*) $d \in R$ ist ein *ggT von a und b*, falls

(a) $d|a$ und $d|b$, und für $d' \in R$ gilt:

(b) $d'|a$ und $d'|b$ impliziert $d'|d$.

Bemerkungen

(*i*) $b|a$ genau dann, wenn $a \in < b >$ genau dann, wenn $< a > \subseteq < b >$

(*ii*) d ist ggT von a, b genau dann, wenn $< a, b > \subseteq < d >$ und aus $< a, b > \subseteq < d' >$ folgt $< d > \subseteq < d' >$ (für alle $d' \in R$).

Wir bekommen damit eine hinreichende Bedingung für die $\exists^Z$ eines ggT:

Proposition 2
Ist $< a, b >$ ein Hauptideal, i.e. $< a, b > = < d >$, dann ist d ein ggT von a und b.

Definition
$x, y \in R$ sind *assoziiert*, falls ein $u \in R^\times$ exisitert mit $xu = y$.

Proposition (Eindeutigkeit bis auf Einheiten)
Sei R integer, $d, d' \in R$ und $a, b \in R$.
Es gilt: $< d > = < d' >$ genau dann, wenn $d' = ud$ mit $u \in R^\times$.
Insbesondere alle ggT von a, b sind zueinander assoziiert.

Beweis

"$\Leftarrow$" $d' = ud \Leftrightarrow d = d'u^{-1}$ mit $u \in R^\times$. Also $d' = ud \Rightarrow d' \in < d > \Rightarrow < d' > \subseteq < d >$ und umgekehrt aus $d = d'u^{-1}$ folgt auch $< d > \subseteq < d' >$.

"$\Rightarrow$" Seien $d, d' \neq 0$ und $< d > = < d' >$. Also

$$\left.\begin{array}{ll} \exists x \in R & : \quad d = xd' \\ \exists y \in R & : \quad d' = yd \end{array}\right\| \Rightarrow d = xyd \text{ i.e. } d(1 - xy) = 0$$

R integer und $d \neq 0$ impliziert $1 - xy = 0$, also $xy = 1$. $\square$

Eine wichtige Eigenschaft von E.R. ist der

Algorithmus zum Berechnen von ggT:

Seien $a, b \in R, b \neq 0$

$$
\begin{array}{lllll}
a & = & q_0 b & + & r_o \\
b & = & q_1 r_0 & + & r_1 \\
r_0 & = & q_2 r_1 & + & r_2 \\
\vdots & & & & \\
r_{n-2} & = & q_n r_{n-1} & + & r_n \quad r_n \neq 0 \\
r_{n-1} & = & q_{n+1} r_n & &
\end{array}
$$

$$
\underbrace{N(b) > N(r_0) > \cdots > N(r_{n-1}) > N(r_n)}_{\text{endlich viele Schritte im Abstieg !}} > 0
$$

Wir fassen zusammen:

Satz

Sei $R \in D; a, b \in R \neq 0$ und $d = r_n$ (wie oben), so ist

(1) d ein ggT von a und b

(2) $d = ax + by$ für geeignete $x, y \in R$.

Hauptidealbereiche

Definition

Ein *Hauptidealbereich* ist ein Integritätsbereich, in dem jedes Ideal ein Hauptideal ist.

Abkürzung: H.I.R.

Proposition 4

Sei R ein Hauptidealbereich, $a, b \neq 0, a, b \in R$ und d ein Erzeuger von $< a, b >$. Es gelten:

(1) d ist ggT von a, b

(2) $\exists x, y \in R$ mit $d = ax + by$

(3) d ist (bis auf Einheiten) eindeutig.

Beweis

Siehe Proposition 2 $\square$

Proposition 5
Jedes Primideal in einem Hauptidealbereich ist auch maximal.

Beweis
Sei $< p > \neq \{0\}$ Primideal und $M \supseteq < p > M$ maximal (wir wissen M existiert!). Nun ist auch $M = < m >$ ein Hauptideal; $p \in < m >$ also existiert $r \in R$ mit $p = rm$.
Aber $< p >$ prim $\Rightarrow r \in < p >$ oder $m \in < p >$.
1. Fall: $m \in < p > \Rightarrow < m > \subseteq < p > \Rightarrow < p > = M$
2. Fall: $r \in < p > \Rightarrow r = ps \Rightarrow p = rm = psm$ oder $sm = 1$.
Somit ist aber $m \in R^\times$. Das widerspricht, dass M maximal (also echt) ist. □

Beispiele

(1) Alle Ideale in $\mathbb{Z}$ sind Hauptideale $n\mathbb{Z}$ und $n\mathbb{Z}$ ist maximal genau dann, wenn $n = p$ eine Primzahl ist.

(2) $\mathbb{Z}[x]$ ist kein Hauptidealbereich, weil $< x >$ prim, aber nicht maximal ist.

Wir verallgemeinern: Sei R integer. Es gilt:
Korollar
$R[x]$ ist ein Hauptidealbereich genau dann, wenn R ein Körper ist.

Beweis
"$\Leftarrow$" R ist ein Körper $\Rightarrow R[x]$ ist E.R. $\Rightarrow R[x]$ ist H.I.R.
"$\Rightarrow$" $R[x]/ < x > \backsimeq R, < x >$ Primideal.
Nun $R[x]$ Hauptidealbereich $\Rightarrow < x >$ maximales Ideal $\Rightarrow R[x]/ < x >$ ist ein Körper. □

6. Script zur Vorlesung: Algebra (B III)

Prof. Dr. Salma Kuhlmann, Gabriel Lehéricy, Simon Müller

WS 2016/2017: 15. November 2016

Definition

Sei R integer.

(1) $0 \neq p \in R$ ist *Primelement*, wenn $< p >$ *Primideal* ist (für alle $a, b \in R : p|ab \Rightarrow p|a$ oder $p|b$).

(2) $0 \neq r \in R$; $r \notin R^\times$ ist *irreduzible* in R, wenn für alle $a, b \in R : r = ab \Rightarrow a \in R^\times$ oder $b \in R^\times$. Sonst ist r *reduzible*.

Proposition 1

Sei R integer und $p \in R$. p ist Primelement $\Rightarrow p$ ist irreduzible.

Beweis

Sei $< p > \neq \{0\}$ Primideal. Also ist $p \notin R^\times$.

Sei $p = ab; ab \in < p > \Rightarrow a \in < p >$ oder $b \in < p >$.

1. Fall: $a \in < p > \Rightarrow a = pr \Rightarrow p = prb$ oder $p(1 - rb) = 0 \Rightarrow 1 = rb$; also $b \in R^\times$.

2. Fall: Analog. □

Proposition 2

Sei R Hauptidealbereich, $p \in R$ irreduzible $\Rightarrow p$ ist Primelement.

Beweis

Sei $p \notin R^\times; p \neq 0$, p irreduzible.

Sei $M \lhd R$ mit $< p > \subseteq M$. Nun existiert ein $m \in R$ mit $M = < m >$.

$\exists r : p = rm$ und p irreduzible, also

1. Fall		2. Fall
$r \in R^\times$	oder	$m \in R^\times$
$\Downarrow$		$\Downarrow$
$< p > = < m >$		$< m > = R$

Also $< p >$ ist maximal, insbesondere Primideal. □

Definition

Sei R integer. R ist *faktoriell*, wenn

(1) Für alle $0 \neq r \in R \setminus R^\times$ existiert $p_1, \ldots, p_n \in R$ irreduzibel: $r = p_1 \cdots p_n$ (†)

(2) Diese Darstellung ist eindeutig bis auf die Reihenfolge und Assoziiertheit.
(D.h. wenn auch $r = q_1 \cdots q_m$ mit $q_1, \ldots, q_m$ irreduzible, dann ist $m = n$ und $\forall$ i $\exists$ j und $u_i \in R^\times : u_i p_i = q_j$.)

Ist R faktoriell und $r \neq 0$ beliebiges Element, so hat r also eine Darstellung

$$r = u p_1^{e_1} \cdots p_n^{e_n}$$

mit $u \in R^\times, e_i \in \mathbb{N}_0$ und p_i irreduzible. mit $p_i \neq p_j$ für $i \neq j$.

Proposition 3

Sei R faktoriell und $p \in R$ irreduzible $\Rightarrow$ p ist Primelement.

Beweis

Sei $0 \neq p$, $p \in R \setminus R^\times$ irreduzible und $a, b \in R$ mit $p|ab$.
Nun ist $p|ab \Rightarrow ab = pc$ für ein $c \in R$ (∗)
Schreibe a und b wie in (†).
Aus (∗) und Eindeutigkeit in (†) folgt: p ist assoziiert mit einem der irreduziblen Faktoren in der Darstellung von a oder von b.
Ohne Einschränkung sei es a. Also $a = (up)p_2 \cdots p_n; u \in R^\times, p_i \in R$ und damit $p|a$. □

Proposition 4

Sei R faktoriell, $0 \neq a$ und $b \in R$.
$a = u p_1^{e_1} \cdots p_n^{e_n}$ (†)

$b = v p_1^{f_1} \cdots p_n^{f_n}$ (‡)

$u, v \in R^\times, p_i$ irreduzible (Prim), $p_i \neq p_j$ für $i \neq j, e_i f_i \in \mathbb{N}_0$.

Setze $d := p_1^{min(e_1,f_1)} \cdots \; p_n^{min(e_n,f_n)}$ (††)
Dann ist d ein ggT von a und b.

Beweis

Aus (††), (‡) und (†) ist klar, dass $d|a$ und $d|b$. Sei $d' \in R, d'|a$ und $d'|b$. Schreibe

$$d' = v q_1^{g_1} \cdots q_n^{g_n}.$$

für alle i $q_i|d' \Rightarrow q_i|a$ und $q_i|b$. Also für alle i existiert ein j: $q_i|p_j$, so dass $p_j = u_i q_i$ mit $u_i \in R^\times$.
Also $\{p_1, \ldots, p_n\} \supseteq \{u_1 q_1, \ldots, u_n q_n\}$. Analog zeigt man $g_\ell \leq min(e_\ell, f_\ell)$. Also $d'|d$. □

Satz
Sei R ein Hauptidealbereich, dann is R faktoriell.

Beweis
Sei $0 \neq r \in R \setminus R^\times$. Wir wollen eine Darstellung (†) erreichen.
Ist r irreduzibel, dann ist das Ziel erreicht. Sonst zerlege $r = r_1 r_2$, $r_1 \notin R^\times$ und $r_2 \notin R^\times$.
Sind r_1, r_2 irreduzibel, dann ist das Ziel erreicht. Sonst zerlege $r_1 = r_{11} r_{12}$, usw.
Wir wollen zeigen, dass diese Prozedur nach endlich vielen Schritten anhält, sonst bekommen wir eine unendliche (**strikte**) für die Inklusion ansteigende Folge von Idealen:

$$< r > \subsetneq < r_1 > \subsetneq < r_{11} > \subsetneq \cdots \subseteq R$$

Behauptung
Wir zeigen nun, dass dieses in einem Hauptidealbereich nicht der Fall sein kann.
Sei also $I_i \lhd R$ mit $I_1 \subseteq I_2 \subseteq \cdots \subseteq R$.
Setze $I := \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i \lhd R$. Da R ein Hauptidealbereich, existiert $a \in R$ mit $I =< a >$.
Nun $a \in I \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N} : a \in I_n$. Also $I_n \subseteq I =< a > \subseteq I_n$ und somit $I = I_n$.
Damit ist die Behauptung bewiesen.

Wir haben also die $\exists^Z$ einer Darstellung (†) gezeigt. Die Aussage über die Eindeutigkeit erfolgt per Induktion über n in der Darstellung $r = p_1 \cdots p_n$ (genau so wie in Lineare Algebra II, Vorlesung 5 vom 30.04.2012). □

7. Script zur Vorlesung: Algebra (B III)

Prof. Dr. Salma Kuhlmann, Gabriel Lehéricy, Simon Müller

WS 2016/2017: 18. November 2016

Körper $\subsetneq$ Euklidische Bereiche $\subsetneq$ Hauptidealbereiche $\subsetneq$ Faktorielle Bereiche $\subsetneq$ Integritätsbereiche

Konvention
deg von Nullpolynom ist $= 0$.

Proposition 1 (Zusammenfassung)
Sei R integer und $p, q \in R[x]$. Es gelten:

1. $\deg p(x)q(x) = \deg p(x) + \deg q(x)$
2. $(R[x])^\times = R^\times$
3. $R[x]$ ist integer
4. $R[x]$ ist E.R. $\Leftrightarrow$ R ist Körper
5. Quot $(R[x]) := F(x) := \{\frac{p}{q} \mid p, q \in R[x], q \neq 0\}$ ist Körper, wobei $F :=$ Quot (R).

Bemerkung
Sei $I \lhd R$. Dann ist $I[x] :=< I > \lhd R[x] = \{f(x) \in R[x] \mid f(x) = \sum a_i x^i \text{ mit } a_i \in I\}$

Proposition 2
$R[x]/I[x] \backsimeq (R/I)[x]$

Beweis

$$\begin{array}{rccc} \varphi: & R[x] & \to & (R/I)[x] \\ & \sum a_i x_i & \mapsto & \sum \overline{a_i} x^i \end{array}$$

ist ein Ringhomomorphismus; surjektiv; $\ker \varphi = I[x]$. $\square$

Korollar
P ist Primideal in $R \Rightarrow P[x]$ ist Primideal in $R[x]$. □

Exkurs $R[x_1, \ldots, x_n] := R[x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}][x_n]$.
Notation $= \{p(x_1, \ldots, x_n) | p \in R[x_1, \ldots, x_n]\}$.

Also: *Polynome* in den Variablen $x_1, \ldots, x_n$ werden folgendermaßen definiert:
Es ist eine endliche Sumem von *Monomen*.

$$m(x_1, \ldots, x_n) := a x_1^{d_1} \cdots x_n^{d_n} \qquad a \in R$$

$$\text{Notation} \quad \begin{cases} := a \ \underline{x}^{\underline{d}} & d_i \in \mathbb{N}_0 \\ (x_1, \ldots, x_n) := \underline{x} & \\ (d_1, \ldots, d_n) := \underline{d} \in \mathbb{N}_0^n & \end{cases}$$

- d_i ist der *Grad von* x_i in $m(\underline{x})$
- $|\underline{d}| := \sum_{i=1}^{n} d_i$ ist der *Grad von* $m(\underline{x})$ $\deg m(\underline{x}) := |\underline{d}|$
- $\deg p(x_1, \ldots, x_n)$ ist der größte Grad von seinen Monomen.
- Die Summe aller Monomen von $p(x_1, \ldots, x_n)$ vom Grad k heißt die *homogene Komponente von p vom Grad k*.
- Wenn $\deg p = d$, so läßt sich p eindeutig als Summe

$$p = p_0 + p_1 + \cdots + p_d$$

beschreiben, wobei p_k die homogene Komponente vom Grad k ist für $0 \leq k \leq d$ (und $p_k = 0$ vorkommen kann).

Lemma 1
$R[x]$ ist faktoriell $\Rightarrow R$ ist faktoriell.

Beweis
$(R[x])^\times = R^\times \quad (*)$
Sei $0 \neq r \in R \setminus R^\times$. r ist das Produkt vom Irreduziblen in $R[x]$ und diese (deg Bedingungen) müssen deg $= 0$ haben, d.h. sind Elemente aus R. Beachte ferner, dass $r \in R$ irreduzible in $R[x] \Rightarrow$ irreduzible in R, sonst $r = ab$; $a, b \in R \setminus R^\times$. Aber wegen $(*)$: $r = ab; a, b \in R[x] \setminus (R[x])^\times$ - Widerspruch. □

Für die Umkehrung von Lemma 1 brauchen wir ein Hilfslemma.

Lemma von Gauß

Sei R faktoriell und $p(x) \in R[x]$. Wenn $p(x)$ reduzibel in $F[x]$ ist, (wobei $F := \text{Quot}\,(R)$), so ist $p(x)$ reduzibel in $R[x]$.

Das heißt: Wenn $p(x) = A(x)B(x)$ mit $A, B \in F[x], \deg A \geq 1, \deg B \geq 1$, dann gibt es $0 \neq r, 0 \neq s \in F$ mit

$$\left.\begin{array}{l} rA(x) := a(x) \\ sB(x) := b(x) \end{array}\right\} \in R[x] \qquad \deg a(x) \geq 1, \deg b(x) \geq 1$$

und $p(x) = a(x)b(x) \in R[x]$.

Beweis

$$\begin{array}{ccccc} p(x) & = & A(x) & & B(x) \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ R[X] & & F[x] & & F[x] \end{array}$$

Die Koeffizienten von A, B sind aus der Form $\frac{r_i}{s_i}$ mit $r_i, 0 \neq s_i \in R$. Wir multiplizieren A, B jeweils mit den gemeinsamen Nennern seiner Koeffizienten und bekommen eine Gleichung der Form

$$\left.\begin{array}{ccccc} dp(x) & = & a'(x) & & b'(x) \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ d \in R & & \in R[x] & & \in R[x] \end{array}\right\} \text{ mit } d \in R, d \neq 0; \deg a'(x) \geq 1, \deg b'(x) \geq 1; a', b' \in R[x]. \qquad (*)$$

und $a'(x) = \alpha A(x), b'(x) = \beta B(x); \alpha, \beta \in F$.

1. Fall: $d \in R^\times$ ✓

2. Fall: $d \in R \setminus R^\times$

So schreibe $d = p_1 \cdots p_n$, p_i ist irreduzibel in R.

- p_1 irreduzibel $\Rightarrow I =< p_1 >$ ist Primideal in R und $d \in I$
  (also ist auch $I[x] = p_i R[x]$ Primideal).
- $(R/ < p_1 >)[x]$ ist integer.

(*) reduziere $\mod < p_1 >$. Wir bekommen $0 = \overline{a'(x)b'(x)}$ in $(R/ < p_1 >)[x]$. Also ist ohne Einschränkung $\overline{a'(x)} = 0$, das heißt alle Koeffizienten von $a'(x)$ liegen in $< p_1 >$ sind also durch p_1 teilbar in R. So hat man $a''(x) := \frac{1}{p_1}a'(x) \in R[x], \deg a''(x) \geq 1$ mit $\frac{1}{p_1} \in F$, das heißt wir können die Gleichung (*) um p_1 kürzen und bekommen eine neue Gleichung

$$d'p(x) = a''(x)b''(x) \text{ in } R[x].$$

Aber nun hat d' einen irreduziblen Faktor weniger, i.e. $d' = p_2 \cdots p_n$.

Wiederholung mit $p_2, \ldots,$ mit p_n (gleiche Argumente) ergibt eine Gleichung schließlich aus der Form

$$\begin{array}{lrcll} & p(x) & = & a(x)b(x) & a(x), b(x) \in R[x] \\ \text{mit} & a(x) & = & \alpha' a'(x) & \alpha', \beta' \neq 0 \\ & b(x) & = & \beta' b'(x) & \alpha', \beta' \in F \end{array}$$

$$\text{d.h.} \quad \begin{array}{rcl} a(x) & = & \alpha\alpha' A(x) \\ b(x) & = & \beta\beta' B(x) \end{array} \quad \text{mit } \alpha\alpha' \in F \text{ und } \beta\beta' \in F. \qquad \square$$

Korollar

Sei R faktoriell, $F := \text{Quot}\,(R); \deg p \geq 1$, wobei $\sum_{i=0}^{n} a_i x_i =: p(x) \in R[x]$ mit ggT von $\{a_0, \ldots, a_n\} = 1$.

Dann ist $p(x)$ in $R[x]$ irreduzibel genau dann, wenn $p(x)$ in $F[x]$ irreduzibel. Insbesondere ist $p(x) \in R[x]$ normiert und in $R[x]$ irreduzibel, so ist $p(x)$ in $F[x]$ irreduzibel.

Beweis

GL ergibt: Ist $p(x)$ in $F[x]$ reduzibel, so ist $p(x)$ in $R[x]$ reduzibel. Umgekehrt ist $p(x)$ in $R[x]$ reduzibel, dann ist $p(x) = a(x)b(x)$, wobei $a(x), b(x) \in R[x] \setminus R$ (sonst wäre der ggT der Koeffizient von $p(x)$ in R ungleich 1).

Das heißt $p(x) = a(x)b(x)$ für $a(x), b(x) \in R[x], \deg a(x) \geq 1, \deg b(x) \geq 1$. Insbesondere $p(x) = a(x)b(x)$ für $a(x), b(x) \in F[x], \deg a(x) \geq 1, \deg b(x) \geq 1$, das heißt $p(x)$ ist in $F[x]$ reduzibel. $\square$

8. Script zur Vorlesung: Algebra (B III)
Prof. Dr. Salma Kuhlmann, Gabriel Lehéricy, Simon Müller
WS 2016/2017: 22. November 2016

Terminology English/German
Unique factorization domain - faktorieller Ring
Field - Körper
Field of fractions - Quotientenkörper
Principal ideal domain - Hauptidealbereich
Field extension - Körpererweiterung
Prime subfield of a field - Primkörper eines Körpers

UFD's and irreducible polynomials over integral domains

From the last lecture we have the following lemma and corollary:
Lemma 2.1 (Gauss' lemma)
Let R be a unique factorization domain (in German faktorieller Ring) with field of fractions F and $p(x) \in R[x]$. If $p(x) = A(x)B(x)$ for some non-constant polynomials $A(x), B(x) \in F[x]$ then there exist $r, s \in F$ such that $rA(x) = a(x)$ and $sB(x) = b(x)$ are both in $R[x]$ and $p(x) = a(x)b(x)$.

Corollary 2.2
Let R be unique factorization domain with field of fractions F (in German: Quotientenkörper) and let $p(x) \in R[x]$. Suppose that the greatest common divisor of the coefficients of $p(x)$ is 1. Then $p(x)$ is irreducible in $R[x]$ if and only if it is irreducible in $F[x]$. In particular, if $p(x)$ is a monic polynomial that is irreducible in $R[x]$ then $p(x)$ is irreducible in $F[x]$.

Theorem 2.3
A ring R is a unique factorization domain if and only if $R[x]$ is a unique factorization domain.

Proof
The reserve direction was covered in the last lecture. Suppose R is a UFD (unique factorization domain). F is the field of fractions of R and $p(x) \in R[x]$ is non-zero.
Let d be the greatest common divisor of the coefficients of $p(x)$ (NOTE: The greatest common divisor exists because R is a UFD.) and write $p(x) = dq(x)$. The greatest common divisor of the coefficients of q is 1. Since R is a UFD, d can be factored in R into irreducibles and irreducibles in R remain irreducible in $R[x]$ (this is simply because if $d \in R\backslash\{0\}$ and $d = a(x)b(x)$ then $\deg(a(x)) = \deg(b(x)) = 0$; so $a(x), b(x) \in R$).

We now attempt to write $q(x)$ as a product of irreducibles in $R[x]$. Since $F[x]$ is a UFD, there exist $q_1(x), q_2(x), \ldots, q_n(x) \in F[x]$ irreducible in $F[x]$ such that $q(x) = q_1(x) \cdots q_n(x)$. Gauss' lemma means we may assume these factors are in $R[x]$. Since the greatest common divisor of the coefficients of $q(x)$ is 1, the greatest common divisor of the coefficients of each of the $q_i s$ is also 1. Thus by corollary 2.2 each of these factors is irreducible in $R[x]$. Thus we can write p as a product of irreducible elements in $R[x]$:

$$d_1 \cdots d_m q_1(x) \cdots q_n(x)$$

where $d = d_1 \cdots d_m$ and each d_i is irreducible in R.
It remains to show that this factorization is unique up to ordering and multiplication by units. This is in Übungsblatt. □

Corollary 2.4
If R is a UFD then so is $R[x_1, \ldots, x_n]$.

Proof
Use induction on n. □

We will give two methods for testing the irreducibility of a polynomial over an integral domain.
Proposition 2.5
Let I be a prime ideal of an integral domain (in German: Integritätsbereich) R and let $p(x)$ be a non-constant monic (in German: normiertes) polynomial in $R[x]$. If the image of $p(x)$ in $(R/I)[x]$ can't be factored in $(R/I)[x]$ into two polynomials of smaller degree, then $p(x)$ is irreducible.

Proof
Suppose $p(x)$ is non constant, monic and reducible. Then $p(x) = a(x)b(x) \in R[x]$ with $a(x), b(x)$ non-constant (if either $a(x)$ or $b(x)$ were constant then would be a unit, since $p(x)$ is monic). We may assume that $a(x)$ and $b(x)$ are monic since $p(x)$ is monic.
Let $\overline{p}(x), \overline{a}(x)$ and $\overline{b}(x)$ be the images of $p(x), a(x)$ and $b(x)$ in $(R/I)[x]$. Then $\overline{p}(x) = \overline{a}(x)\overline{b}(x)$ and since $a(x)$ and $b(x)$ are monic and non-constant, $\overline{a}(x)$ and $\overline{b}(x)$ are non-constant and monic. By comparing degrees $\overline{a}(x)$ and $\overline{b}(x)$ are polynomials of smaller degree than $\overline{p}(x)$. □

The most common application of this result is to prove that a polynomial over $\mathbb{Z}$ is irreducible. For instance consider the polynomial $X^4 + 9X^3 + 10X^2 + 22X + 1 \in \mathbb{Z}[X]$.
Its image in $\mathbb{Z}_2[X]$ is $X^4 + X^3 + 1$. It is clear that this polynomial does not have a root in $\mathbb{Z}_2$ (check 0 and 1). Thus if it were reducible, it must factor as a product of two irreducible polynomials in $\mathbb{Z}_2[x]$ of degree 2. If $p(x) \in \mathbb{Z}_2[X]$ is irreducible of degree 2 then its leading term is 1 and its constant term is also 1 since 0 is not a root. The polynomial $X^2 + 1$ has root 1. Therefore, there is only one irreducible polynomial of degree 2 in $\mathbb{Z}_2[X]$. That is $X^2 + X + 1$ (check it has no roots). But $(X^2 + X + 1)^2 = X^4 + X^2 + 1$. So $X^4 + X^3 + 1$ is irreducible over $\mathbb{Z}_2$. Thus $X^4 + 9X^3 + 10X^2 + 22X + 1$ is irreducible over $\mathbb{Z}$.

Unfortunately this does not always work.

Proposition 2.6 (Eisenstein's Criterion)
Let $\mathfrak{p}$ be a prime ideal of an integral domain $R, n \geq 1$ and let $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0$ be a polynomial in $R[x]$. Suppose $a_{n-1}, \ldots, a_0 \in \mathfrak{p}$ and $a_0 \notin \mathfrak{p}^2$. Then $f(x)$ is irreducible in $R[x]$.

Proof
Claim: If $a(x), b(x)$ are non-constant polynomials over an integral domain R with $a(x)b(x) = x^n$ and $n > 0$ then $b(0) = a(0) = 0$.
Proof of claim: Since R is an integral domain either $a(0) = 0$ or $b(0) = 0$. Suppose $a(0) = 0$. Let $F_i = \text{Quot}\,(R)$ and m be maximal such that $a(x) = x^m a'(x)$ for some $a'(x) \in F[x]$. Thus $a'(0) \neq 0$. So now $a'(x)b(x) = x^{n-m}$. Since $b(x)$ is non-constant $n - m > 0$. Therefore $a'(0)b(0) = 0$. So $b(0) = 0$. So we have proved the claim.
Suppose $f(x) = a(x)b(x)$ in $R[x]$ where $a(x)$ and $b(x)$ are non-constant polynomials. It is easy to see that the constant term of $f(x)$ is the product of the constant term of $a(x)$ and the constant term of $b(x)$.
Let $\overline{f}(x), \overline{a}(x), \overline{b}(x)$ be the images of $f(x), a(x)$ and $b(x)$ in $(R/\mathfrak{p})[x]$. Then $x^n = \overline{f}(x) = \overline{a}(x)\overline{b}(x)$. Thus $\overline{a}(0) = \overline{b}(0) = 0$ since $R/\mathfrak{p}$ is an integral domain. But this means that the constant terms of $a(x)$ and $b(x)$ are in $\mathfrak{p}$. Thus the constant term of $f(x)$ is in $\mathfrak{p}^2$ contradicting our assumptions. Therefore $f(x)$ is irreducible. □

Corollary 2.7
Let p be a prime in $\mathbb{Z}$, $n \geq 1$ and let $f(x) := x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$. Suppose that p divides a_i for all $0 \leq i \leq n-1$ but p^2 does not divide a_0. Then $f(x)$ is irreducible in both $\mathbb{Z}[x]$ and $\mathbb{Q}[x]$.

Proof
Apply Eisenstein at the prime ideal (p). □

The polynomial $X^5 + 10X^4 + 25X^2 + 35 \in \mathbb{Z}[X]$ is irreducible by Eisenstein's theorem applied at 5.
Extra example
Consider the polynomial $f(X) := X^4 + 1 \in \mathbb{Z}[x]$. We can't apply Eisenstein's theorem directly. Let $g(X) = f(X + 1)$. So $g(X) = X^4 + 4X^3 + 6X^2 + 4X + 2$. Now, by Eisenstein applied at 2, $g(x)$ is irreducible and if f could be factored as a product of non-constant polynomials then so could g. Thus f is irreducible.

Fields

A reminder from linear algebra:

Definition 3.1

The characteristic of a field F, denoted char (F) is the smallest strictly positive integer n such that $n \cdot 1_F = 0$. If such an integer does not exist we say the characteristic is zero.
Note that the characteristic of a field will always be zero or a prime. (Check you know why?)

Definition 3.2

The prime subfield (Primkörper eines Körpers) of a field F is the smallest subfield of F. Note that the prime subfield is always $\mathbb{Q}$ (when F has characteristic zero) or $\mathbb{F}_p$ (when F has positive characteristic p).

Note that a field of characteristic p may well have infinitely many elements. For example consider the field of fractions of $\mathbb{F}_p[x]$.

Definiton 3.3

If K is a field containing a subfield F then K is called an extension field (in German: Körpererweiterung) of F, denoted K/F. We refer to F as the base field (in German: Grundkörper).
If K/F is a field extension, then the multiplication defined in K makes K as a vector space over F.
The degree of a field extension (Grad einer Körpererweiterung) K/F, denoted $[K : F]$, is the dimension of K as a vector space over F. The extension is called finite if $[K : F]$ is finite and is called infinite otherwise.

Examples

The field extension $\mathbb{C}/\mathbb{R}$ has degree 2. Every element of $\mathbb{C}$ can be written as a linear combination of 1 and i and if $a + bi = 0$ then $a^2 + b^2 = (a + bi)(a - bi) = 0$; so $a = b = 0$. So $1, i$ are a basis for $\mathbb{C}$ as a vector space over $\mathbb{R}$.

Remark 3.4

A homomorphism of fields is always injective.

Proof

Let $\varphi : F \to K$ be a homomorphism between fields F and K. The kernel of φ is an ideal of F. The only ideals of F are $\{0\}$ and F. Since $\varphi(1_F) = 1_K \neq 0, \ker \varphi = 0$. So φ is injective. $\square$

Theorem 3.5

Let F be a field and $p(x) \in F[x]$ be irreducible. There exists a field extension K of F in which $p(x)$ has a root.

Proof

consider the quotient $F[x]/ < p(x) >$. Since $p(x)$ is irreducible and $F[x]$ is a PID (Hauptidealbereich), the ideal generated by $p(x)$ is maximal. Therefore $F[x]/ < p(x) >$ is a field.

Let $\varphi : F[x] \to F[x]/ < p(x) >$ be the canonical homomorphism. The restriction of φ to F is a homomorphism of fields and thus is injective. Thus F is isomorphic to its image $\varphi(F)$ in $F[x]$. We may now identify F with its image in $F[x]/ < p(x) >$.

This is a subtle point: what does it mean to identify F with its image in $F[x]/ < p(x) >$?

If $\psi : F \to K$ is a homomorphism of fields (with K and F disjoint as sets) we simply relabel each element $\varphi(f)$ for $f \in F$ as f. We can do this because ψ is injective; i.e. if $\psi(f) = \psi(g)$ then $f = g$. Now F as a set is a subset of K. Because ψ is a homomorphism $\psi(0) = 0, \psi(1) = 1$ and for all $f, g \in F, f + g = \psi(f) + \psi(g)$ and $f \cdot g = \psi(f) \cdot \psi(g)$. Thus F is also a subfield of K.

Back to the proof: Let $\overline{x}$ be the image of x in $F[x]/ < p(x) >$. We now have that $p(\overline{x}) = \overline{p(x)}$ since φ is a homomorphism. But $p(x) \in < p(x) >$, so $\overline{p(x)} = 0$. Thus $\overline{x}$ is a root of the polynomial $p(x)$ in K. $\square$

9. Script zur Vorlesung: Algebra (B III)

Prof. Dr. Salma Kuhlmann, Gabriel Lehéricy, Simon Müller

WS 2016/2017: 25. November 2016

Satz 1

Sei $p(x) \in F[x]$ irreduzibel; $\deg p(x) = n, n \in \mathbb{N}$.
Es gilt $[K : F] = n$, wobei $K := F[x]/ < p(x) >$.

Beweis

Setze $\overline{x} := \theta$. Wir behaupten $O := \{1, \theta, \theta^2, \ldots, \theta^{n-1}\}$ ist eine F-Basis für K.

- Sei $a(x) \in F[x]$. Schreibe $a(x) = q(x)p(x) + r(x)$ mit $r(x) = 0$ oder $\deg r(x) < n$.
  Also $a(x)+ < p(x) >= r(x)+ < p(x) >$,

  d. h. $\overline{a(x)} = \overline{r(x)}$

  $\qquad \shortparallel$

  d. h. $a(\overline{x}) = r(\overline{x})$

  Schreibe $r(x) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i, a_i \in F$, i.e. $\overline{a(x)} =: r(\theta)$, also $K \ni \overline{a(x)} \in \text{span } O$.

- O ist linear unabhängig über F: Seien $b_0, \ldots, b_{n-1} \in F$ mit $\sum b_i \theta^i = 0$.
  Setze $b(x) := \sum b_i x^i$. Es ist: $0 = b(\theta) = \overline{b(x)}$. Also $b(x) \in < p(x) >$ und $\deg b(x) < \deg p(x)$ und damit muss $b(x) = 0$ das Nullpolynom sein, i.e. $b_i = 0$ für alle $i = 0, \ldots, n-1$. □

Bemerkung

$K = \{a(\theta), a(x) \in F[x], \deg a(x) < n\}$ mit $a(\theta) + b(\theta) = (a + b)(\theta)$ für alle $a(x), b(x) \in F[x]$ und $a(\theta)b(\theta) = r(\theta)$ (wobei $\deg r(x) < n; r(x) \in F[x]$ der Rest in E.A. ist; $a(x)b(x) = q(x)p(x) + r(x)$).

Definition

(1) Sei K/F eine Körpererweiterung; $S \subseteq K$.
Notation: $F(S)$ = der kleinste Unterkörper von K, der $F \bigcup S$ enthält $= \bigcap\{L \mid L \subseteq K$ Unterkörper $; L \supseteq F \bigcup S\}$.
$F(S)$ heißt der *Körper der von S über F erzeugt ist.*

(2) Wenn $S = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ endlich ist, schreiben wir $L = F(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ und sagen: L ist *endlich erzeugt über F.*

(3) Wenn $S = \{a\}$ heißt $L = F(a)$ eine *einfache Erweiterung* und a heißt ein *primitives Element* für die Körpererweiterung L/F.

Satz 2
Sei $p(x) \in F[x]$ irreduzibel; $\alpha \in K/F$ eine Nullstelle. Es ist: $F(\alpha) \simeq F[x]/ < p(x) >$.

Beweis
Betrachte

$$\begin{array}{rccc} \varphi: & F[x]/ < p(x) > & \to & F(\alpha) \subseteq K \\ & a(x) + < p(x) > & \mapsto & a(\alpha) \end{array}$$

- Es ist $\varphi \restriction_F = Id \restriction_F$ (i.e. $\varphi(r) = r$ für alle $r \in F$) und $\varphi(\overline{x}) = \alpha$.
- φ ist wohldefiniert: $a(x) \equiv b(x) \mod < p(x) > \Leftrightarrow a(x) - b(x) = p(x)q(x)$. Also $a(\alpha) - b(\alpha) = 0$ und damit $a(\alpha) = b(\alpha)$.
- $\varphi \neq 0$ (e.g. $\varphi \restriction_F = Id \restriction_F$), also φ ist ein injektiver Ringhomomorphismus und damit ist $\varphi : F[x]/ < p(x) > \simeq Bi(\varphi) \subseteq F(\alpha) \subseteq K$ ein Unterkörper. Also ist $Bi(\varphi)$ ein Unterkörper von K und enthält $F \bigcup \{\alpha\}$ und somit ist $F(\alpha) \subseteq Bi(\varphi)$. Also $Bi(\varphi) = F(\alpha)$. $\square$

Korollar 1
K/F ist eine Körpererweiterung; $\alpha \in K$ ist Nullstelle vom irreduziblen $p(x) \in F[x]; \deg p = n$.
Es ist $F(\alpha) = \{a(\alpha) \mid a(x) \in F[x]; \deg a(x) < n\}$.

$\alpha, \beta \in K/F; p(x) \in F[x]$ ist irreduzibel mit $p(\alpha) = p(\beta) = 0$.
Es ist $F(\alpha) \simeq F[x]/ < p(x) > \simeq F(\beta)$.

Allgemeiner betrachten wir folgenden Ansatz:

$$\begin{array}{ccc} F(\alpha) & \overset{?}{\dashrightarrow} & F'(\beta) \\ | & & | \\ F & \underset{\varphi}{\xrightarrow{\sim}} & F' \end{array}$$

Satz 3
Seien F, F' Körper. $\varphi : F \xrightarrow{\sim} F'$ und $p(x) \in F[x]$ irreduzibel.
Setze $p(x) = \sum a_i x^i$ und $p'(x) := \sum \varphi(a_i) x^i$ (Anwendung von φ auf Koeffizienten). Dann ist $p'(x) \in F'[x]$ irreduzibel.
Sei $\alpha \in K/F$ mit $p(\alpha) = 0$ und $\beta \in K'/F'$ mit $p'(\beta) = 0$. Dann läßt sich φ zu einer Isomorphie φ' fortsetzen

$$\begin{array}{lccc} \varphi': & F(\alpha) & \to & F'(\beta) \\ & \varphi' \restriction_F = \varphi & \text{und} & \varphi'(\alpha) = \beta \end{array} .$$

Beweis

(1) $p'(x)$ ist irreduzibel, weil eine Faktorisierung $p'(x) = a'(x)b'(x)$ mit $\deg a'(x) \geq 1, \deg b'(x) \geq 1, a'(x), b'(x) \in F'[x]$ eine Faktorisierung (durch Anwendung von φ^{-1} auf Koeffizienten) $p(x) = a''(x)b''(x)$ von $p(x)$ in $F[x]$ induziert, mit
$\deg(a''(x)) \geq 1, \deg(b''(x)) \geq 1; a''(x), b''(x) \in F[x]$.

(2) $F[x] \simeq F'[x]$ und $< p(x) > \simeq < p'(x) >$ (durch Anwendung von φ auf Koeffizienten). Also $F(\alpha) \simeq F[x]/ < p(x) > \simeq F'[x]/ < p'(x) > \simeq F(\beta)$. □

10. Script zur Vorlesung: Algebra (B III)

Prof. Dr. Salma Kuhlmann, Gabriel Lehéricy, Simon Müller

WS 2016/2017: 29. November 2016

Definition

(1) $\alpha \in K/F$ ist *algebraisch über* F (alg/F), wenn es ein Polynom $0 \neq f(x) \in F[x]$ gibt mit $f(\alpha) = 0$.

(2) Wenn α nicht algebraisch ist, dann heißt α *transzendent* über F.

(3) Die Körpererweiterung K/F heißt *algebraisch*, falls für alle $\alpha \in K$: α ist algebraisch über F.

Proposition 1
Sei α alg $/F$. Es gibt ein eindeutiges normiertes irreduzibles Polynom $m_{\alpha,F}(x) \in F[x]$, so dass

(i) $m_{\alpha,F}(\alpha) = 0$.

(ii) Ist $f(\alpha) = 0$ für ein $f \in F[x]$, dann teilt $m_{\alpha,F}(x)$ das Polynom $f(x)$ in $F[x]$.

Beweis

- Setze $m(x) := m_{\alpha,F}(x) :=$ normiertes Polynom vom minimalem deg, so dass $m(\alpha) = 0$. Sei $f(x) \in F[x]$, schreibe $f(x) = q(x)m(x) + r(x), \deg r(x) < \deg m(x)$ oder $r(x) = 0$. Wir sehen $0 = f(\alpha) \Leftrightarrow r(\alpha) = 0$. Die Minimalität vom $\deg m(x)$ impliziert $r(x) \equiv 0$, also $m(x)|f(x)$.

- Ist $m'(x)$ normiert vom minimalem deg mit $m'(\alpha) = 0$, dann gilt wie oben $m'(\alpha)|m(\alpha)$, aber auch $m(\alpha)|m'(\alpha), m(\alpha), m'(\alpha)$ normiert $\Rightarrow m'(x) = m(x)$. □

Bemerkung
Vergleiche mit 13. Vorlesung "Lineare Algebra II" vom 1. Juni 2012:
Das Minimal-Polynom von T in $F[x]$ ist der eindeutige normierte Erzeuger vom Annihilator-Ideal von T

$$\mathcal{A}_T := \{f \in F[x] | f(T) = 0\}.$$

Definition

$m_{\alpha,F}(x)$ heißt das *Minimal-Polynom* von α über F. Wir schreiben $m(x)$, wenn klar.

Proposition 2

Sei $\alpha \in K/F$ algebraisch über F. Es ist $[F(\alpha) : F] = \deg m_{\alpha,F}(x)$.

Beweis

$F(\alpha) \simeq F[x]/ < m(x) >$ □

Terminologie

$\deg \alpha/F := \deg m_{\alpha,F}(x) = \deg F(\alpha)/F$.

Bemerkung

(1) $L \supseteq K \supseteq F, \alpha \in L,$ alg $/F \to \alpha$ alg $/K$ und es gilt

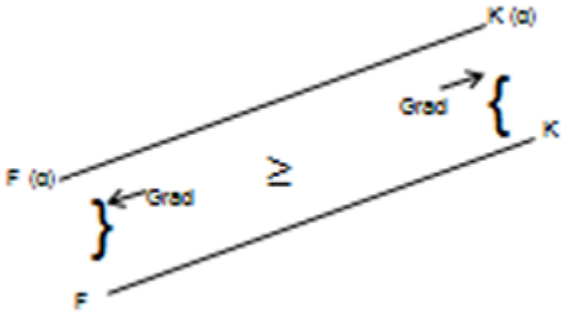
(2) $m_{\alpha,K}(x)$ teilt $m_{\alpha,F}(x)$ in $K[x]$, insbesondere

(3) $\deg m_{\alpha,K}(x) \leq \deg m_{\alpha,F}(x)$. Es gilt ferner

(4) $m_{\alpha,K}(x) = m_{\alpha,F}(x)$ genau dann, wenn $m_{\alpha,F}(x)$ irreduzibel bleibt in $K[x]$. Wir haben aus 3.:

(5) $[K(\alpha) : K] \leq [F(\alpha) : F]$

Für $\alpha \in L$ alg $/F \subseteq K \subseteq L$:



Wir zeigen nun die Umkehrung von Proposition 2.

(**Erinnerung:** K/F ist *endlich*, wenn $[K : F] < \infty$, sonst unendlich.)

Proposition 3
Sei $\alpha \in K/F$, so dass $[F(\alpha) : F] < \infty$. Dann ist α algebraisch über F.

Beweis
Sei $[F(\alpha) : F] = n$, dann sind $F(\alpha) \ni 1, \alpha, \alpha^2, \ldots, \alpha^n$ linear abhängig über F. Also existieren $b_i \in F$ *nicht alle gleich 0*, so dass $\sum_{i=0}^{n} b_i \alpha^i = 0$. Setze $f(x) := \sum b_i x^i \in F[x]; \neq 0$. Dann gilt $f(\alpha) = 0; \alpha$ alg $/F$. □

Bemerkung
$x \in F(x)$ ist transzendent über F (weil $f(x) = 0 \Leftrightarrow f = 0$ das Nullpolynom ist). Wir sehen, dass $F(x)/F$ eine endlich erzeugte (eigentlich eine einfache) Erweiterung ist, aber $[F(x) : F] = \infty$. Also i.a.: K/F endlich erzeugt $\not\Rightarrow K/F$ endlich.

Korollar
K/F ist endlich $\Rightarrow K/F$ algebraisch.

Beweis
Sei $\alpha \in K$. Es ist $[F(\alpha) : F] \leq [K : F] < \infty$, also ist α algebraisch über F. □

Satz 1
$F \subseteq K \subseteq L$. Es gilt $[L : F] = [L : K][K : F]$. (Also insbesondere ist L/F unendlich genau dann, wenn L/K oder K/F unendlich sind.)

Beweis
Zunächst nehmen wir an: $[L : K] = m$ mit $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\}$ Basis für L/K; $[K : F] = n$ mit $\{\beta_1, \ldots, \beta_n\}$ Basis für K/F. Ein Element λ aus L ist also aus der Form $\lambda = \sum_i a_i \alpha_i$ mit $a_i \in K$. $(*)$
Schreibe $a_i = \sum_j b_{ij} \beta_j$ mit $b_{ij} \in F$ $(**)$

$\rightsquigarrow$ Einsetzen von $(**)$ in $(*)$ ergibt $\lambda = \sum_{i,j} b_{ij} \alpha_i \beta_j$. $(***)$

Also ist span $_F\{\alpha_i \beta_j \mid i = 1, \ldots, m, j = 1, \ldots, n\} = L$. Wir zeigen, dass diese Menge auch F-linear unabhängig ist.
Sei also $\sum_{i,j} b_{ij} \alpha_i \beta_j = 0$ für $b_{ij} \in F$. $(\dagger)$
Setze $a_i := \sum_j b_{ij} \beta_j \in K$ und schreibe $(\dagger)$, also $\sum_i a_i \alpha_i = 0$. Nun ist α_i linear unabhängig über $K \Rightarrow a_i = 0$ für alle i, also $\sum_j b_{ij} \beta_j = 0$ für alle i.
Nun ist β_j linear unabhängig über $F \Rightarrow b_{ij} = 0$ für alle j. □

Wir haben gezeigt: $[L : F] = \infty \Rightarrow [L : K] = \infty$ oder $[K : F] = \infty$.
Sei nun $[K : F]$ unendlich, dann ist auch $[L : F]$ unendlich, weil K ein F-Unterraum von L ist.
Sei nun $[L : K] = \infty$, dann ist a fortiori $[L : F] = \infty$ ($\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ sind K linear unabhängig $\rightarrow \lambda_1, \ldots, \lambda_s$ sind F-linear unabhängig).

Korollar
Sei $L/K/F$ und L/F endlich. Es gilt $[K : F] | [L : F]$.

Wir haben bisher gezeigt, dass α algebraisch über F ist $\Leftrightarrow [F(\alpha) : F] < \infty$. Wir sind nun in der Lage dieses für $F(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ zu verallgmeinern.

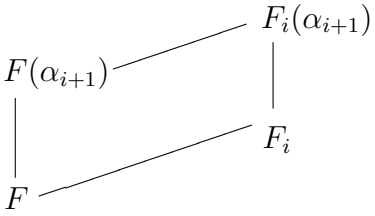
Bemerkung
$F(\alpha_1, \alpha_2) = F(\alpha_1)(\alpha_2) \subseteq K$ (folgt unmittelbar aus der Definition von $F(\alpha_1, \alpha_2)$).

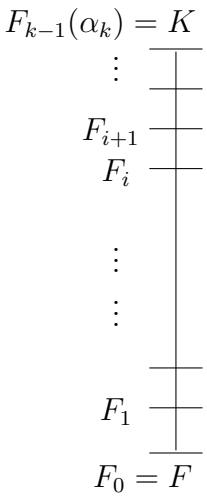
Satz 2
K/F ist endlich $\Leftrightarrow$ K/F ist endlich erzeugt von alg $/F$-Elementen.

Beweis

"$\Rightarrow$" Setze $[K : F] = n$. Sei $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ die F-Basis von K. Jedes α_i ist algebraisch über F. Außerdem ist $K = \text{span}_F\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\} \subseteq F(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \subseteq K$
und damit ist $K = F(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$.

"$\Leftarrow$" Sei $K = F(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$. Sei α_i algebraisch über F und $\deg \alpha_i = n_i$. Setze $F = F_0$ und $F_1 = F_0(\alpha_i)$. $F_{i+1} := F_i(\alpha_{i+1})$, so $K = F_{k-1}(\alpha_k)$.
Es ist:





Also $[F_{i+1} : F_i] \leq n_{i+1}$. Also (Satz 1) $[K : F] = [F_k : F_{k-1}] \cdots [F_1 : F_0] \leq n_1 \cdots n_k$ und damit ist K/F endlich. $\square$

11. Script zur Vorlesung: Algebra (B III)

Prof. Dr. Salma Kuhlmann, Gabriel Lehéricy, Simon Müller

WS 2016/2017: 2. Dezember 2016

Erinnerung: Eine Erweiterung K/F ist genau dann endlich, wenn es endlich erzeugt von algebraischen Elementen ist.

Korollar 1
α, β sind algebraisch über $F \to \alpha \pm \beta, \alpha\beta, \alpha/\beta (\beta \neq 0)$ sind auch algebraisch über F.

Beweis
$F(\alpha, \beta)/F$ ist endlich und $\alpha \pm \beta, \alpha\beta, \alpha/\beta \in F(\alpha, \beta)$ für $\beta \neq 0$. □

Korollar 2
Sei L/F eine beliebige Körpererweiterung. Die Menge $\{\alpha \in L \mid \alpha \text{ alg } /F\}$ ist ein Unterkörper von L (und enthält F).

Definition 1
Dieser Unterkörper heißt der *relative algebraische Abschluss von F in L.*

Beispiele

(1) $\mathbb{C}/\mathbb{Q}$. $\tilde{\mathbb{Q}} := \{z \in \mathbb{C} \mid z \text{ alg } /\mathbb{Q}\}$ ist der *Körper der algebraischen Zahlen.*

(2) $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$. $\tilde{\mathbb{Q}}^r := \{r \in \mathbb{R} \mid r \text{ alg } /\mathbb{Q}\}$ ist der *Körper der reellen algebraischen Zahlen.*

Es gilt $\tilde{\mathbb{Q}} \subsetneq \mathbb{C}$ und $\tilde{\mathbb{Q}}^r \subsetneq \mathbb{R}$ (z.B: $\pi, e \in \mathbb{R} \backslash \tilde{\mathbb{Q}}^r$) . Eigentlich gilt es ferner $|\tilde{\mathbb{Q}}| = |\tilde{\mathbb{Q}}^r| = \aleph_0$ und $|\mathbb{C} \setminus \tilde{Q}| = |\mathbb{R} \setminus \tilde{\mathbb{Q}}^r| = 2^{\aleph_0}$.

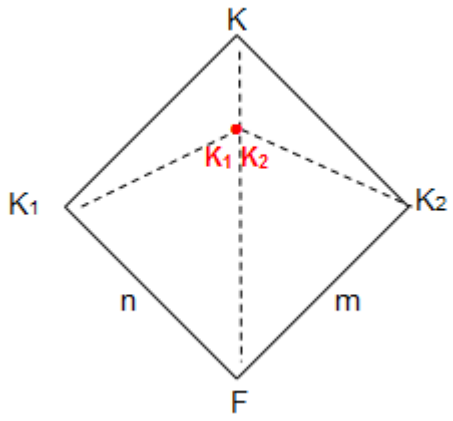
Satz 1

L/K	und	K/F	$\Rightarrow$	L/F
alg		alg		alg

Beweis
Sei $\alpha \in L, k(x) \in K[x]; k(\alpha) = 0$. Setze $k(x) := \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ mit $a_i \in K$ nicht alle Null. Betrachte $F_1 := F(a_0, \ldots, a_n)$ und $F_1(\alpha), F_1 \subseteq K, F_1(\alpha) \subseteq L; a_i$ alg $/F$ und α alg $/F_1$.
Also $[F_1 : F] < \infty$ und $[F_1(\alpha) : F_1] < \infty \Rightarrow [F_1(\alpha) : F] = [F_1(\alpha) : F_1][F_1 : F] < \infty$.
Insbesondere $F_1(\alpha)/F$ algebraisch und damit α algebraisch über F.

Definition 2
Sei K/K_1 und K/K_2 eine Körpererweiterung. $K_1K_2 := K_1(K_2) = K_2(K_1) \subseteq K$ heißt *das Kompositum von K_1 und K_2 in K.*

Lemma
Sei



$\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ eine F-Basis von K_1 und $\{\beta_1, \ldots, \beta_m\}$ eine F-Basis von K_2 (ohne Einschränkung mit $\alpha_1 = \beta_1 = 1$). Es ist $\text{span}_F\{\alpha_i\beta_j / i, j\} = K_1K_2$.

Beweis
Es ist klar, dass $\text{span}_F\{\alpha_i\beta_j / i, j\} \subseteq K_1K_2$. Bemerke, dass $K_1K_2 = F(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots \beta_m)$. Weil $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots \beta_m$ algebraisch über F sind, gilt außerdem $F(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots \beta_m) = \text{span}_F(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots \beta_m)$. Es gilt also:
$K_1K_2 = \text{span}_F(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots \beta_m) \subseteq \text{span}_F\{\alpha_i\beta_j / i, j\} \subseteq K_1K_2$ □

Korollar 3
Seien $F \subseteq K_1, K_2 \subseteq K; [K_1 : F] := n; [K_2 : F] := m$. Es gilt $[K_1K_2 : F] \leq nm$ und $[K_1K_2 : F] := mn$, falls β_j linear unabhängig über K_1 bleiben (oder α_i linear unabhängig über K_2 bleiben).

Beweis
Dass $[K_1K_2 : F] \leq nm$ folgt direkt aus dem Lemma. Wir nehmen an, dass $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ linear unabhängig über K_2 sind und wir zeigen, dass die Familie $\{\alpha_i\beta_j \mid 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\}$ linear unabhängig über F ist. Seien $(\nu_{ij})_{ij} \subseteq F$ so, dass $\sum_{i,j} \nu_{ij}\alpha_i\beta_j = 0$. Man kann diese Summe umschreiben: $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i(\sum_{j=1}^{m} \nu_{ij}\beta_j) = 0$. Für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$ ist $\sum_{j=1}^{m} \nu_{ij}\beta_j \in K_2$. Nach annahme muss dann $\sum_{j=1}^{m} \nu_{ij}\beta_j = 0$ gelten für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$. Weil $\beta_1, \ldots, \beta_m$ linear unabhängig über F sind, muss dann $\nu_{ij} = 0$ gelten für alle i, j. □

Korollar 4
Seien $F \subseteq K_1, K_2 \subseteq K$ mit $[K_1 : F] = n, [K_2 : F] = m$ und ggT $(n, m) = 1$.
Es gilt $[K_1K_2 : F] = mn$.

Beweis
$$\left.\begin{array}{rcl} n & | & [K_1K_2 : F] \\ m & | & [K_1K_2 : F] \end{array}\right\} \Rightarrow kgV(n,m)|[K_1K_2 : F]$$
$kgV(n,m) = \frac{nm}{ggT(n,m)} = mn$. Also $mn \leq [K_1K_2 : F] \leq mn$. □

Zerfällungskörper

Definition 3
Sei $\mathcal{E} \subseteq F[X]$. Ein Zerfällungskörper von $\mathcal{E}$ ist eine Körpererweiterung K/F, so dass folgendes gilt:

1. Jedes $f \in \mathcal{E}$ zerfällt vollständig in lineare Faktoren in $K[X]$
2. K wird von den Nullstellen der Polynome in $\mathcal{E}$ erzeugt, also
   $K = F(\{\alpha \in K \mid \exists f \in \mathcal{E} \text{ mit } f(\alpha) = 0\})$

Definition 4
Sei $f \in F[X]$. Ein Zerfällungskörper von f ist ein Zerfällungskörper der Familie $\{f\}$.

Bemerkung
K ist genau dann ein Zerfällungskörper von f, wenn folgendes gilt:

1. f zerfällt vollständig in lineare Faktoren in $K[X]$
2. Für alle Körper L mit $F \subseteq L \subsetneq K$ zerfällt f in $L[X]$ **nicht**.

Satz 2
Es gibt einen Zerfällungskörper K/F für $f(x)$ über F.

Beweis
Per Induktion zeigen wir zunächst, dass es eine Körpererweiterung E/F gibt, in der $f(x)$ vollständig zerfällt.
Setze $n = \deg f(x)$. $n = 1, E = F$✓ Induktionsanfang $n > 1$.
Sei $p(x)$ ein irreduzibler Faktor von $f(x)$ in $F[x]$ mit $\deg p \geq 2$ (sonst ist wieder $E = F$).
Sei $\alpha \in E_1/F$ eine Nullstelle von $p(x)$, über E_1 haben wir also

(*) $$f(x) = (x - \alpha)f_1(x)$$

$f_1(x) \in E_1[x]; \deg f_1 \leq n - 1$.

Induktionsanfang für f_1 und E_1 ergibt eine E/E_1 und f_1 zerfällt vollständig in $E[x]$. Nun ist auch $\alpha \in E$. Also zerfällt f wie in $(*)$ vollständig über E.
Setze nun $K := \bigcap\{L/F \subseteq L \subseteq E; f \text{ zerfällt vollständig in } L[x]\}$ □

Definition 5
K/F ist *normal*, falls
(*i*) K/F algebraisch ist
(*ii*) und K ein Zerfällungskörper über F
einer Familie von Polynomen $f(x) \in F[x]$.

Proposition
Sei $\deg f = n$ K/F ein Zerfällungskörper von f über F. Es gilt $[K : F] \leq n!$

Beweis
Sei $\alpha_1 \in F_1/F$, α_1 ist Nullstelle von f. Dann ist $[F_1 : F] \leq n$ und $f(x) = (x - \alpha_1)f_1(x)$, $f_1(x) \in F[x]$, $\deg f_1 \leq n - 1$.
Wiederholung: $\alpha_2 \in F_2/F_1, \alpha_2$ ist Nullstelle von f_1.
Dann ist $[F_2 : F_1] \leq n - 1$ und damit $[F_2 : F] \leq n(n - 1)$ usw. □

Satz 3 (Eindeutigkeit bis auf Isomorphie)
Sei $\varphi : F \xrightarrow{\sim} F'$ eine Isomorphie.
$f(x) \in F[x] \rightsquigarrow f'(x) \in F'[x]$ $(\deg f \geq 1)$.
E ist Zerfällungskörper für f über F - E' ist Zerfällungskörper für f' über F'.
Dann läßt sich φ fortsetzen:

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow[\sim]{\sigma} & E' \\ | & & | \\ F & \xrightarrow[\varphi]{\sim} & F' \end{array}$$

Beweis
Sei $\deg f := n$. Induktion nach n. Wenn f über F erfällt, dann zerfällt f' über F' und $\sigma = \varphi$. Sei also $p(x)$ ein irreduzibler Faktor von $f(x)$ in $F[x]$ mit $\deg p \geq 2$ und $p' = \varphi(p)$ der entsprechende Faktor von $f'(x)$ in $F'[x]$.
$\alpha \in E$ ist Nullstelle für $p(x)$ und $\beta \in E'$ ist Nullstelle für $p'(x)$. Setze $F_1 := F(\alpha)$ und $F_1' := F'(\beta)$.
Aus Satz 3 der 9. Vorlesung folgt, dass ein σ_1 existiert, so dass

$$\begin{array}{ccc} F_1 & \xrightarrow[\sigma_1]{\sim} & F_1' \\ | & & | \\ F & \xrightarrow[\varphi]{\sim} & F' \end{array}$$

Wir haben also den folgenden Ansatz:

$$\sigma_1 : F_1 \xrightarrow{\sim} F_1'$$

$f(x) = (x - \alpha)f_1(x)$ über F_1, $\deg f_1 \leq n - 1$ und E ist ein Zerfällungskörper von f_1 über F_1, weil $E \supseteq F_1$ und alle Nullstellen von f_1 und für $E \supsetneq L \supseteq F_1$ ist es unmöglich, dass L alle Nullstellen von f_1 enthält (sonst enthält L α und alle Nullstellen von f_1, also alle Nullstellen von f - Widerspruch. Minimalität von E als ein Zerfällungskörper von f über F).
$f'(x) = (x - \beta)f_1'(x)$ über F_1', $\deg f_1 \leq n - 1$ und E' ist ein Zerfällungskörper von f_1' über F_1'.
Also haben wir nun den Ansatz f_1, F_1, σ_1 mit $\deg f_1 \leq n - 1$.

Die Induktionsannahme liefert ein σ, so dass

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow[\sigma]{\sim} & E' \\ | & & | \\ F_1 & \xrightarrow[\sigma_1]{\sim} & F_1' \end{array}$$

Also

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow[\sigma]{\sim} & E' \\ | & & | \\ F_1 & \xrightarrow[\sigma_1]{\sim} & F_1' \\ | & & | \\ F & \xrightarrow[\varphi]{\sim} & F' \end{array}$$

Korollar
Ein Zerfällungskörper von $f \in F[x]$ über F ist bis Isomorphie auf F eindeutig.

Beweis
Seien K und K' Zerfällungskörper von f über F. Es gilt

$$\begin{array}{ccc} K & \xrightarrow[\sigma]{\sim} & K' \\ | & & | \\ F & \xrightarrow{Id} & F \end{array}$$

$\sigma \restriction F = Id$ $\square$

Definition

(*a*) $\tilde{F}/F$ ist ein *algebraischer Abschluss* von F, falls

(a) $\tilde{F}/F$ algebraisch ist;

(b) $f(x) \in F[x]$ vollständig in lineare Faktoren über $\tilde{F}$ zerfällt für alle $f \in F[x]$.

(*b*) K heißt *algebraisch abgeschlossen*, falls jedes $f \in K[x]$ ($\deg f \geq 1$) eine Nullstelle in K hat.

Bemerkung

K ist algebraisch abgeschlossen $\Leftrightarrow$ $f \in K[x]$ ($\deg f \geq 1$) zerfällt vollständig in linearen Faktoren über $K \Leftrightarrow K = \tilde{K}$.

12. Script zur Vorlesung: Algebra (B III)

Prof. Dr. Salma Kuhlmann, Gabriel Lehéricy, Simon Müller

WS 2016/2017: 6. Dezember 2016

Proposition 1
Sei $\tilde{F}$ ein algebraischer Abschluss von F. Dann ist $\tilde{F}$ algebraisch abgeschlossen.

Beweis
Sei $f(x) \in \tilde{F}(x)$; α ist Nullstelle von $f(x)$. Dann ist $\tilde{F}(\alpha)/\tilde{F}$ algebraisch und $\tilde{F}/F$ algebraisch. Also ist auch $\tilde{F}(\alpha)/F$ algebraisch und damit ist auch α/F algebraisch.
Sei $m_{\alpha,F}$ das Minimalpolynom von α/F, dann zerfällt $m_{\alpha,F}$ in $\tilde{F}[x]$ und hat $(x-\alpha)$ als linearen Faktor. Es folgt $\alpha \in \tilde{F}$. □

Sei F ein beliebiger Körper. Wir zeigen nun:
Satz 1
Es gibt eine algebraische abgeschlossene Körpererweiterung von F.

Beweis
Setze $F = K_0$. Wir definieren per Induktion nach $n \in \mathbb{N}_0$ eine ansteigende Folge

$$K_0 \subseteq \cdots \subseteq K_j \subseteq K_{j+1} \subseteq \cdots$$

von der Körpererweiterung, so dass jedes Polynom $f \in K_{j-1}[x]$ mit $\deg f \geq 1$ eine Nullstelle in K_j hat. Dann setzen wir $K := \bigcup K_j$.
K/F ist dann eine Körpererweiterung, wenn $f(x) \in K[x]$ $(\deg f \geq 1)$, dann existiert ein j mit $f(x) \in K_j[x]$ und f hat eine Nullstelle in $K_{j+1} \subseteq K$. Also ist K algebraisch abgeschlossen.

Und nun zur Induktion:
Für $f(x) \in F[x](\deg f \geq 1)$ sei x_f eine neue Variable. Betrachte $F[\cdots, x_f, \cdots]$ (Polynomring in der Variablen x_f) und das Ideal $I :=< \{f(x_f); f \in F[x]\} >$.

Behauptung
I ist echt. Sonst ist

$$1 = g_1 f_1(x_{f_1}) + \cdots + g_n f_n(x_{f_n})(*)$$

mit $g_i \in F[\cdots, x_f, \cdots]$. Schreibe $x_i := x_{f_i}$ für $i = 1, \ldots, n$ und seien $x_{n+1}, \ldots, x_m$ alle anderen Variablen, die unter den g_i's noch vorkommen. Also ist

$$1 = g_1(x_1, \ldots, x_m) f_1(x_1) + \cdots + g_n(x_1, \ldots, x_m) f_n(x_n)(*)$$

eine polynomiale Gleichung.
Sei F'/F eine Körpererweiterung mit $\alpha_i \in F'$, Nullstelle für $f_i(x)$. Durch Einsetzen von α_i für x_i mit $i = 1, \ldots, n$ und 0 für x_j mit $j = n-1, \ldots, m$ in $(*)$ muss es immer noch eine Gleichung ergeben, die nun im Körper F' gelten muss, das heißt $1 = 0$ in F' - Widerspruch.

I ist echt. Sei $\mathcal{M}$ maximal. $\mathcal{M} \lhd F[\cdots, x_f, \cdots]$ und $I \subseteq \mathcal{M}$. Setze $K_1 := F[\cdots, x_f, \cdots]/\mathcal{M}$. K_1/K_0 und $f \in K_0[x]$ hat eine Nullstelle in K_1, weil $f(\overline{x_f}) = \overline{f(x_f)} = 0$ (da $f(x_f) \in I$).
Wiederhole mit K_j/K_{j-1} und setze $K = \bigcup K_j$ wie schon erwähnt. □

Korollar 1
$\exists^Z$: Sei K algebraisch abgeschlossen und $F \subseteq K$. Dann ist der relative algebraische Abschluss von F in K ein algebraischer Abschluss von F.
Eindeutigkeit: (Übungsaufgabe siehe Übungsblatt))
Ein algebraischer Abschluss von F ist bis auf Isomorphie eindeutig.

Beweis
Per Definition ist $\tilde{F}/F$ algebraisch. Sei $f(x) \in F[x]$ ($\deg f \geq 1$), da K algebraisch abgeschlossen ist, $K[x] \ni f(x)$ zerfällt vollständig in lineare Faktoren $(x - \alpha)$ in $K[x]$. Aber α ist algebraisch über F und $\alpha \in K$, also $\alpha \in \tilde{F}$. Also zerfällt $f(x)$ in $\tilde{F}[x]$. □

Kapitel 2: Separable und inseparable Körpererweiterung

Bemerkung
Sei $f(x) \in F[x]$, K/F ein Zerfällungskörper für f. Also $f(x) = (x-\alpha_1)^{n_1}(x-\alpha_2)^{n_2}\cdots(x-\alpha_k)^{n_k}$ i n $K[x]$; $n_i \geq 1$; $\alpha_i \neq \alpha_j$ für $i \neq j$.

Definition 1
- n_i ist die *Vielfachheit* der Nullstelle α_i.
- α_i ist eine *mehrfache* Nullstelle, wenn $n_1 > 1$, sonst ist
- α_i eine *einfache* Nullstelle.

Definition 2
(1) $f(x) \in F[x]$ ($\deg f \geq 1$) ist *separabel*, wenn es nur einfache Nullstellen hat.
(2) f nicht separabel heißt *inseparabel*.

Definition 3
$Df(x) = D(a_n x^n + \cdots + a_0) = na_n x^{n-1} + \cdots + a_1 \in F[x]$.
$D : F[x] \to F[x]$ ist ein *Ableitungsoperator* und erfüllt die Produktregel

$$Dfg = gDf + fDg.$$

Bemerkung
(*i*) $\deg Df < \deg f$ immer !
(*ii*) $f(x) = x^p \in F[x]; p$ ist Primzahl; Char $F = p$. Dann ist $f(x) \not\equiv 0$, aber $Df(x) = px^{p-1} \equiv 0$.
(*iii*) $f(x) \in F[x]$ ($\deg f \geq 1$) und Char $F = 0 \Rightarrow Df \not\equiv 0$ (weil zum Beispiel $na_n \neq 0$, falls $a_n \neq 0$ ist).

Proposition 2
Sei $f(x) \in F[x]$ ($\deg f \geq 1$). Eine Nullstelle α für $f(x)$ ist eine mehrfache Nullstelle genau dann, wenn α auch eine Nullstelle für $Df(x)$ ist. Das heißt, dass die Menge { mehrfache Nullstelle von f} = { gemeinsame Nullstelle von f und Df} ist.

Beweis

"$\Rightarrow$" Sei α eine mehrfache Nullstelle. $f(x) = (x-\alpha)^n g(x)$ mit $n \geq 2$.
$Df(x) = n(x-\alpha)^{n-1}g(x) + (x-\alpha)^n Dg(x)$; $n-1 \geq 1 \Rightarrow \alpha$ ist Nullstelle von $Df(x)$.

"$\Leftarrow$" Sei α eine gemeinsame Nullstelle von $f(x)$ und $Df(x)$.
Schreibe $f(x) = (x-\alpha)h(x)$. $(*)$
Also ist $Df(x) = h(x) + (x-\alpha)Dh(x)$. Beim Einsetzen von α für x, ergibt das $h(\alpha) = 0$.
Zurück in $(*)$ ergibt es $f(x) = (x-\alpha)^2 h_1(x)$. $\square$

Bemerkung

Die mehrfachen Nullstellen von f stimmen überein mit den gemeinsamen Nullstellen von f und DF, das heißt mit den Nullstellen von ggT (f, Df).

Beweis

"$\Leftarrow$" α ist Nullstelle von ggT $(f, DF) \to \alpha$ ist Nullstelle von f und Df. Ist klar.

"$\Rightarrow$" Sei α eine Nullstelle von f und $DF \in F[x]$. Also gilt $m_{\alpha,F}/f$ und $m_{\alpha,F}/Df$ und damit $m_{\alpha,F}/$ ggT (f, Df) auch. Da α Nullstelle von $m_{\alpha,F}$, folgt nun α ist Nullstelle von ggT. $\square$

Korollar 2

$f \in F[x]$ $(\deg f \geq 1)$ normiert ist separabel genau dann, wenn ggT $(f, Df) = 1$.

Beweis

"$\Leftarrow$" Folgt aus der Bemerkung.

"$\Rightarrow$" f separabel $\Rightarrow$ keine gemeinsame Nullstelle mit $Df \Rightarrow$ ggT $(f, Df) = 1$. $\square$

13. Script zur Vorlesung: Algebra (B III)

Prof. Dr. Salma Kuhlmann, Gabriel Lehéricy, Simon Müller

WS 2016/2017: 9. Dezember 2016

Erinnerung
$f(x) \in F[x](\deg f \geq 1); \alpha$ ist eine mehrfache Nullstelle $\Leftrightarrow \alpha$ ist Nullstelle von $Df(x) \Leftrightarrow m_{\alpha,F}|f(x)$ und $m_{\alpha,F}|Df(x)$.

Korollar 1
Sei $f(x)(\deg f \geq 1)$ irreduzibel. Es gilt: f ist inseparabel genau dann, wenn $Df = 0$.
(Das heißt, dass f eine mehrfache Nullstelle hat $\Leftrightarrow Df = 0$).

Beweis
α ist eine mehrfache Nullstelle $\Leftrightarrow m_{\alpha,F}$ gT von f und Df.
Nun ist f irreduzibel $\Rightarrow \deg m_{\alpha,F} = \deg f > \deg Df$. Also $m_{\alpha,F}|Df \Rightarrow Df \equiv 0$. □

Beispiel

(1) $f(x) = x^{p^n} - x \in \mathbb{F}_p[x]$
$Df(x) = p^n x^{p^n-1} - 1 = -1$
Df hat gar keine Nullstelle, also ist f separabel.

(2) $f(x) = x^n - 1$; $Df(x) = nx^{n-1}$
Annahme: Char $F = 0$ oder Char $F := p \nmid n$. Dann ist $Df \not\equiv 0$ und hat 0 als einzige Nullstelle. 0 ist aber keine Nullstelle von f, also ist f separabel und die Gleichung

$$x^n - 1 = 0$$

hat n paarweise verschiedene Nullstellen. (Sie heißen die n $n$te Einzeitswurzel.)

(3) $f(x) = x^n - 1$; Char $F = p|n$; $Df(x) = nx^{n-1} \equiv 0 \Rightarrow f$ ist inseparabel. □

Korollar 2
Sei Char $F = 0$.

(*i*) Sei $f \in F[x]$ irreduzibel (mit $\deg f \geq 1$). Dann ist f separable. Allgemeiner

(*ii*) $f(x)$ ist separabel genau dann, wenn $f = c\Pi p_i(x); 0 \neq c \in F; p_i \neq p_j$ für $i \neq j$, p_i ist irreduzibel normiert.

Beweis

(*i*) $f \not\equiv 0 \Rightarrow Df \not\equiv 0$ (weil Char $F = 0$).

(*ii*) Verschiedene Irreduzible (normierte) haben keine gemeinsame Nullstelle wegen Eindeutigkeit des Minimal-Polynoms. In der Primfaktorisierung

$$f = c \prod_{i=1}^{k} p_i(x) \qquad p_i \neq p_j$$

haben außerdem keiner der Faktoren eine mehrfache Nullstelle (folgt aus *(i)*). Also hat f keine mehrfache Nullstelle. □

Beispiel

$(4) f = x^2 - t \in \mathbb{F}_2(t)[x]$. f ist irreduzibel, weil $\sqrt{t} \notin \mathbb{F}_2(t)$.
$Df \equiv 0$, also ist f irreduzibel, aber inseparabel.

Bemerkung

Sei $f(x) = g(x^p) \in F[x]$ Char $F = p > 0; \deg f \geq 1$
i.e. $f(x) = \gamma_m (x^p)^m + \cdots + \gamma_1 x^p + \gamma_0$. $(*)$
Also $Df(x) \equiv 0$ und f ist inseparabel.
Umgekehrt: $f(x) \in F[x] (\deg f \geq 1)$ mit $Df \equiv 0$ muss die Gestalt $(*)$ haben, i.e. $f(x) = g(x^p)$ mit $g(x) \in F[x]$.

Proposition 1 (Übungsaufgabe)

Sei Char $F = p > 0$.

$$\begin{array}{lrcll} \text{Es gelten} & (a+b)^p & = & a^p + b^p & \text{für alle } a, b \in F \\ & (ab)^p & = & a^p b^p & \\ \text{und} & \varphi : F & \to & F & \\ & a & \mapsto & a^p & \end{array}$$

ist ein injektiver Körper-Homomorphismus (Frobenius).

Korollar 3

$\mathbb{F}$ ist endlich $\Rightarrow \varphi : \mathbb{F} \to \mathbb{F}$
$a \mapsto a^p$
ist auch surjektiv, also ein Automorphismus. Das heißt $\mathbb{F} = \mathbb{F}^p := \{a^p; a \in \mathbb{F}\}$.

Beweis

$\mathbb{F}$ ist endlich, also endlich dimensional über den Primkörper $\mathbb{F}_p$ und kann also nicht isomorph sein zu einem echten Unterraum.

Proposition 2

Jedes irreduzible Polynom über einen endlichen Körper $\mathbb{F}$ ist separabel. Ein Polynom $f(x) \in \mathbb{F}[x](\deg f \geq 1)$ ist separabel $\Leftrightarrow$ Produkt von paarweise verschiedenen irreduziblen Polynomen. (Korollar 2 gilt also auch für endliche Körper.)

Beweis

Sei $f \in \mathbb{F}[x](\deg f \geq 1)$; Char $\mathbb{F} := p > 0, f$ irreduzibel.

f inseparabel $\Leftrightarrow Df = 0 \Leftrightarrow f(x) = g(x^p)$.

Berechne:

$$\begin{array}{rcccc} f(x) = g(x^p) & = & a_m(x^p)^m & +\cdots+ & a_1x^p + a_0 \\ & = & b_m^p(x^m)^p & +\cdots+ & b_1^px^p + b_0^p \\ & = & (b_mx^m)^p & +\cdots+ & (b_1x)^p + b_0^p \\ & = & (b_mx^m & +\cdots+ & b_1x + b_0)^p \end{array}$$

Widerspruch. □

Bemerkung

Wichtig war: $\mathbb{F}^p = \mathbb{F}$.

Definition

Ein Körper F heißt *perfekt*, falls Char $F = 0$ oder Char $F = p > 0$ und $F = F^p$.

Proposition 3

Proposition 2 gilt für F perfekt (anstatt $\mathbb{F}$ endlich).

Kapitel 3: Endliche Gruppen

Definition 1

Sei G eine Gruppe. $H \subseteq G$ ist eine *Untergruppe*, falls H eine Gruppe ist (mit der Verknüpfung von G), das heißt $H \neq \emptyset; x, y \in H \Rightarrow xy \in H, x^{-1} \in H$.

Definition 2

(*i*) Seien G, H Gruppen. Eine Abbildung $\varphi : G \to H$ ist ein *Gruppenhomomorphismus*, wenn $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$ ist für alle $x, y \in G$.

(*ii*) Ein bijektiver Homomorphismus heißt *Isomorphismus*.

Notation: $|G| := \begin{cases} \sharp & \text{der Elemente in } G, \text{ falls } G \text{ endlich} \\ \infty & \text{sonst} \end{cases}$

14. Script zur Vorlesung: Algebra (B III)

Prof. Dr. Salma Kuhlmann, Gabriel Lehéricy, Simon Müller

WS 2016/2017: 13. Dezember 2016

Definition

(1) G ist eine Gruppe mit $x \in G$.

$$|x| := \begin{cases} \text{kleinste } n \in \mathbb{N} \text{ mit } x^n = 1 \text{ falls vorhanden} \\ \infty \qquad \text{sonst} \end{cases}$$

$|x|$ ist die *Ordnung von* x, per Konvention $|x^0| = 1$.

(2) H ist *zykisch*, wenn ein $x \in H$ existiert mit

$$H =< x >:= \{x^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$$

und x heißt *Erzeuger* der Gruppe H (additiv $H =< x >= \{nx \mid n \in \mathbb{Z}\}$).

Bemerkung

Eine zyklische Gruppe ist abelsch.

Proposition 1

$H =< x >\Rightarrow |x| = |H|$, das heißt

(1) $|H| = n < \infty$ für $n \in \mathbb{N}_0 \Leftrightarrow x^n = 1$ und $x^i \neq x^j$ für $i \neq j; i, j \in \{0, \ldots, n-1\}$

(2) $|H| = \infty$ genau dann, wenn $x^i \neq x^j$ für alle $i, j \in \mathbb{N}_0$ mit $i \neq j$.

Beweis

(1) $|x| = n < \infty$, wenn $x^i = x^j$ mit $0 \leq i < j < n \Rightarrow x^{j-i} = 1$ mit $0 < j - i < n$ - Widerspruch.
Sei $x^k \in < x >; k = qn + r$ mit $0 \leq r < n$, also $x^k = x^{nq+r} = (x^n)^q x^r = x^r$.

(2) $|x| = \infty$ und $x^i = x^j$ mit $i \neq j \Rightarrow x^{j-i} = 1$. Also $|x| \leq j - i$ - Widerspruch. □

Proposition 2

Sei G eine Gruppe mit $x \in G$ und $m, n \in \mathbb{Z}$. Es gelten $x^n = 1$ und $x^m = 1 \Rightarrow x^d = 1$ für $d = \text{ggT}\ (m, n)$. Insbesondere $x^m = 1$ mit $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow |x||m$.

Beweis

$d = mr + ns$. Also $x^d = (x^m)^r (x^n)^s = 1$. Sei nun $x^m = 1$. Setze $|x| = n$. Schreibe $m = qn + r$ mit $0 \leq r < n$. $x^m = (x^n)^q x^r \Rightarrow x^r = 1$ - Widerspruch. Also $r = 0$. □

Proposition 3
Zyklische Gruppen derselben Ordnung sind isomorph.

Beweis
(1) Sei $|G| = |H| = n, G =< x >$ und $H =< y >$. Betrachte

$$\begin{array}{rccc} \varphi: & G & \to & H \\ & x^k & \mapsto & y^k \end{array}$$

φ ist wohldefiniert, weil $x^r = x^s \Rightarrow x^{r-s} = 1 \Rightarrow n|r-s \Rightarrow nt = (r-s)$
$\Rightarrow y^{(r-s)} = (y^n)^t = 1 \Rightarrow y^r y^{-s} = 1 \Rightarrow y^r = y^s$.
Es ist klar, dass φ ein Homomorphismus und auch surjektiv ist. Da beide Gruppen die gleiche Ordnung haben und endlich sind, folgt das φ injektiv ist.
(Eine Abbildung $\varphi : S \to S$ (S ist eine endliche Menge) ist injektiv $\Leftrightarrow$ sie ist surjektiv $\Leftrightarrow$ sie ist bijektiv).

(2) Sei nun $|G| = |H| = \infty$.

$$\begin{array}{rccc} \varphi: & G & \to & H \\ & x^k & \mapsto & y^k \end{array}$$

ist ein surjektiver Homomorphismus und ferner injektiv, weil $x^i \neq x^j \Leftrightarrow i + j \Leftrightarrow y^i \neq y^j$.
□

Beispiel
(1) $|G| = n$ und G ist zyklisch $\Rightarrow G \simeq \mathbb{Z}_n$
(2) $|G| = \infty$ und G ist zyklisch $\Rightarrow G \simeq \mathbb{Z}$

Erzeuger

Proposition 4 (Übungsblatt)
Sei G eine Gruppe mit $x \in G$ und $j \in \mathbb{Z}$ mit $j \neq 0$. Es gelten
(1) $|x| = \infty \Rightarrow |x^j| = \infty$
(2) $|x| = n < \infty \Rightarrow |x^j| = \frac{n}{ggT(n,j)}$
(3) $|x| = n < \infty$ und $j|n \Rightarrow |x^j| = \frac{n}{j}$.

Proposition 5
Sei $H =< x >$ und $j \in \mathbb{N}$.
(1) $|x| = \infty$, dann ist x^j Erzeuger genau dann, wenn $j = \pm 1$
(2) $|x| < \infty$, dann ist x^j Erzeuger genau dann, wenn $|x| = n$ und ggT $(j, n) = 1$.

Beweis
(1) Übungsaufgabe
(2) x^j Erzeuger $\Leftrightarrow |H| = |x^j|$. Also $\Leftrightarrow |x^j| = |x| \Leftrightarrow \frac{n}{ggT(j,n)} = n \Leftrightarrow ggT(j,n) = 1$. □

Korollar 6

$|H| = n; H$ist zyklisch, dann ist die Anzahl der Erzeuger von $H = \phi(n)$ (Euler).

Satz 7

Sei $H =< x >$ zyklisch.

(1) $K \leq H \Rightarrow K$ zyklisch, das heißt $K =< x^d >$ (oder $K = \{1\}$), wobei d die kleinste $d \in \mathbb{N}$ mit $x^d \in K$.

(2) $|H| = \infty \Rightarrow < x^j > \neq < x^i >$ für $i \neq j; i, j \in \mathbb{N}_0$.

(3) $|H| = n < \infty; j \in \mathbb{N}_0; j|n \Rightarrow \exists! K \leq H; K$ zyklisch; $|K| = j$ und $K =< x^{\frac{n}{j}} >$

15. Script zur Vorlesung: Algebra (B III)

Prof. Dr. Salma Kuhlmann, Gabriel Lehéricy, Simon Müller

WS 2016/2017: 16. Dezember 2016

Satz 1

Sei $H =< x >$ zyklisch

(1) Sei $K \leq H$, dann ist K zyklisch.

(2) Wenn $|H| = \infty$, dann sind $< x^j > \neq < x^i >$ für $i \neq j$ und $\{< x^i > i \in \mathbb{N}_0\}$ ist die Menge aller Teilgruppen von H. (Übungsaufgabe).

(3) Wenn $|H| = n < \infty$ und $a \in \mathbb{N}$ mit $a|n$, dann gibt es eine eindeutige Teilgruppe der Ordnung a, nämlich $< x^{n/a} >$ und $\{< x^d > |d|n\}$ ist die Menge aller Teilgruppen von $H \neq \{1\}$.

Beweis

(1) $K = \{1\}$ ist zyklisch, also ohne Einschränkung $K \neq \{1\}$.
Sei $k \in \mathbb{N}$ die kleinste, so dass $x^k \in K$. Also ist $< x^k > \leq K$.
Sei $x^a \in K; DA \Rightarrow a = qk + r$ mit $0 \leq r < k$ und $x^r = x^a x^{-qk} \in K$.
Da k minimal gewählt ist, muss $r = 0$ sein. Also $a = qk$ und $x^a = (x^k)^q \in < x^k >$.
Also $K \leq < x^k >$.

(3) Sei $d := \frac{n}{a}$, also $d|n$ und $|x^d| = \frac{n}{ggT(n,d)} = n/d = n/(n/a) = a$. Somit ist $| < x^d > | = a$.
Eindeutigkeit: Sei $K \leq H$ mit $|K| = a$ und $b \in \mathbb{N}$ kleinste, so dass $K =< x^b >$. Wir berechnen $\frac{n}{d} = a = |K| = |x^b| = \frac{n}{ggT(n,b)}$. Daraus folgt $d = ggT(n, b)$, insbesondere $d|b$.
Also $x^b \in < x^d >$ und $K =< x^b > \leq < x^d >$.
Da aber $|K| = a = | < x^d > |$, folgt nun $K =< x^d >$. □

Proposition 2

Sei $\mathcal{A}$ eine nichtleere Menge von Teilgruppen, dann ist $\bigcap \mathcal{A}$ auch eine Teilgruppe.

Beweis

Setze $K := \bigcap \mathcal{A}; a, b \in K \Rightarrow ab^{-1} \in A$, für alle $A \in \mathcal{A}$ (weil $A \leq H$), also $ab^{-1} \in K$ und damit $K \leq H$. □

Definition 1
Sei $S \subseteq H$ eine Untermenge; $\mathcal{A} := \{K \leq H; S \subseteq K\}$.
Definiere $< S >= \bigcap \mathcal{A}$. $< S >$ ist die (für die Inklusion) kleinste Teilgruppe von H, die S enthält. $< S >$ heißt die *Teilgruppe, die von S erzeugt ist.*
Konvention: $< \emptyset >= \{1\}$
Notation: $S = \{a_1, \ldots, a_n\}; < S >=< a_1, \ldots, a_n >$ (wenn S endlich ist).

Proposition 3
Sei $S \neq \emptyset$. $< S >= \{a_1^{\varepsilon_1} \ldots a_n^{\varepsilon_n}; n \in \mathbb{N}; a_i \in S; \varepsilon_i = \pm 1\}$.

Beweis
Übungsaufgabe zu zeigen: Diese Menge ist eine Teilgruppe. Sie enthält S und muss in jeder Teilgruppe, die S enthält enthalten sein. □

Spezialfall: Wenn H abelsch. (Übungsaufgabe, Übungsblatt).

Proposition 4
Sei $\varphi : G \to H$ ein Homommorphismus. Es gelten

(1) $\varphi(1) = 1$
(2) $\varphi(g^{-1}) = \varphi(g)^{-1}$
(3) $\varphi(g^n) = \varphi(g)^n$ für alle $n \in \mathbb{Z}$
(4) $\ker \varphi := \{g \in G; \varphi(g) = 1\} \leq G$
(5) $\text{im } \varphi := \{h \in H; \exists g \in G : \varphi(g) = h\} \leq H$

Wir wollen Faktorengruppen definieren.

Definition 2
Sei $H \leq G$ und $g \in G$.
$gH := \{gh \mid h \in H\}$ ist die linke Nebenklasse von g bezüglich H und $Hg := \{hg \mid h \in H\}$ ist die rechte Nebenklasse.
Additive Notation: $g + H$ und $H + g$

Proposition 5
Sei $H \leq G$. Es gelten:

(1) Die Menge der linken Nebenklassen bilden eine Partition von G i.e. $G = \bigcup_{g \in G} gH$ und $uH \cap vH \neq \emptyset \Rightarrow uH = vH$.
(2) Für alle $u, v \in G : uH = vH \Leftrightarrow v^{-1}u \in H$.

Beweis

(1) $1 \in H$, also $g \in gH$ für alle $g \in G$. Also $G = \bigcup gH$. Sei $uH \cap vH \neq \emptyset$. Sei $x \in uH, x \in vH$, also $x = uh_1 = vh_2$ für geeignete $h_1, h_2 \in H$. Also $u = v\underbrace{h_2 h_1^{-1}}_{\in H}$.
Sei $t \in H$. Es gilt also $ut = v(h_2 h_1^{-1})t = v(h_2 h_1^{-1} t) \in vH$, so dass $uH \subseteq vH$.
Analog: $uH \supseteq vH$.

(2) $uH = vH$ genau dann, wenn $u \in vH$ genau dann, wenn $u = vh$ für ein $h \in H$ genau dann, wenn $v^{-1}u \in H$. □

Proposition 6

Sei $N \leq G$. Die Verknüpfung

$$(uN)(vN) := (uv)N$$

ist wohldefiniert genau dann, wenn

$$ghg^{-1} \in N \text{ für alle } g \in G; \text{ für alle } h \in N \qquad (*)$$

Beweis

"⇒" Wohldefiniert →

$$\left.\begin{array}{l} u, u_1 \in uN \\ v, v_1 \in vN \end{array}\right\} \Rightarrow (uv)N = (u_1 v_1)N$$

Sei $g \in G, n \in N$, dann setze $u = 1, v = g^{-1}, u_1 = n, v_1 = g^{-1} \Rightarrow 1g^{-1}N = ng^{-1}N$ i.e. $g^{-1}N = ng^{-1}N$.

Nun: $ng^{-1} \in ng^{-1}N$, also $ng^{-1} \in g^{-1}N$. Also $ng^{-1} = g^{-1}n_1$ für geeignetes $n_1 \in N$. Also $gng^{-1} = n_1 \in N$.

"⇐" Sei $u, u_1 \in uN, v, v_1 \in vN$. Zu zeigen: $(uv)N = (u_1 v_1)N$.
Schreibe $u_1 = un, v_1 = vm; n, m \in N$. Wir zeigen: $u_1 v_1 \in (uv)N$.
Wir berechnen: $u_1 v_1 = (un)(vm) = u(vv^{-1})nvm = uv(\underbrace{v^{-1}nv}_{:=n_1 \in N})m = uvn_1 m = uv(\underbrace{n_1 m}_{\in N})$ □

Zusatz zu Proposition 6

Wenn wohldefiniert, dann definiert die Verknüpfung $(uN)(vN) := (uv)N$ eine Gruppenoperation auf die Menge der linken Nebenklassen. (Übungsaufgabe).

Definition

Sei $N \leq G$. N ist normal, falls $(*)$ in Proposition 6 gilt. Schreibe $N \lhd G$.

Beispiel

Sei φ ein Homomorphismus. $N := \ker \varphi$ ist normal, weil
$\varphi(gng^{-1}) = \varphi(g)\varphi(n)\varphi(g^{-1}) = \varphi(g)\varphi(g)^{-1} = 1$.
Also $gng^{-1} \in N$ für alle $g \in G$ und $n \in N$.
Umgekehrt: Sei G/N *die Gruppe der linken Nebenklassen* für ein $N \lhd G$.

Proposition 7

$$\begin{array}{rccc} \varphi: & G & \twoheadrightarrow & G/N \\ & g & \mapsto & gN \end{array}$$

ist ein surjektiver Gruppenhomomorphismus mit $\ker \varphi = N$.

16. Script zur Vorlesung: Algebra (B III)
Prof. Dr. Salma Kuhlmann, Gabriel Lehéricy, Simon Müller
WS 2016/2017: 20. Dezember 2016

1 Lagrange's theorem

Definition 1.1. *The* ***index*** *of a subgroup H in a group G, denoted $[G : H]$, is the number of left cosets of H in G ($[G : H]$ is a natural number or infinite).*

Theorem 1.2 (Lagrange's Theorem)**.** *If G is a finite group and H is a subgroup of G then $|H|$ divides $|G|$ and*

$$[G : H] = \frac{|G|}{|H|}.$$

Proof. Recall that (see lecture 16) any pair of left cosets of H are either equal or disjoint. Thus, since G is finite, there exist $g_1, ..., g_n \in G$ such that

- $G = \cup_{i=1}^{n} g_i H$ and
- for all $1 \leq i < j \leq n$, $g_i H \cap g_j H = \emptyset$.

Since $n = [G : H]$, it is enough to now show that each coset of H has size $|H|$.
Suppose $g \in G$. The map $\varphi_g : H \to gH : h \mapsto gh$ is surjective by definition. The map φ_g is injective; for whenever

$$gh_1 = \varphi_g(h_1) = \varphi_g(h_2) = gh_2$$

, multiplying on the left by g^{-1}, we have that $h_1 = h_2$. Thus each coset of H in G has size $|H|$.
Thus

$$|G| = \sum_{i=1}^{n} |g_i H| = \sum_{i=1}^{n} |H| = [G : H]|H|$$

□

Note that in the above proof we could have just as easily worked with right cosets. Thus if G is a finite group and H is a subgroup of G then the number of left cosets is equal to the number of right cosets. More generally, the map $gH \mapsto Hg^{-1}$ is a bijection between the set of left cosets of H in G and the set of right cosets of H in G.

Corollary 1.3. *Let G be a finite group. For all $x \in G$, $|x|$ divides $|G|$. In particular, for all $x \in G$, $x^{|G|} = 1$.*

Proof. By Lagrange's theorem $|x| = |\langle x \rangle|$ divides $|G|$. □

Corollary 1.4. *Every group of prime order is cyclic.*

Proof. Let G be a finite group with $|G|$ prime. Take $x \in G \backslash \{1\}$. By lagrange, $|x|$ divides G and thus, since $|G|$ is prime, $|x| = |G|$ or $|G| = 1$. Since $x \neq 1$, $|x| \neq 1$. Thus $|x| = |G|$ and so, $\langle x \rangle = G$. □

Example: The converse of Lagrange's theorem does not hold. The group A_4 is of size 12 and has no subgroup of size 6. See exercise sheet 8 (Recall from linear algebra that A_4 is the group of all even permutations on 4 elements concretely: the set of permutations

$$(123), (132), (234), (243), (134), (143), (124), (142), (12)(34), (13)(24), (14)(23), e).$$

Definition 1.5. *Let G be a group and S, T subsets of G. We write*

$$ST := \{st \mid s \in S \text{ and } t \in T\}.$$

Proposition 1.6. *If K and H are subgroups of a finite group G then*

$$|HK||H \cap K| = |H||K|.$$

Proof. Let $\varphi : H \times K \to HK$ be the map defined by $\varphi(h, k) := hk$. This map is surjective by definition.

Claim: If $h \in H$ and $k \in K$ then $\varphi^{-1}(hk) = \{(hd^{-1}, dk) \mid d \in K \cap H\}$.

Clearly, if $d \in K \cap H$ and $h' = hd^{-1}, k' = dk$ then $h' \in H$, $k' \in K$ and $h'k' = hk$. Conversely, if $h' \in H$, $k' \in K$ and $h'k' = hk$ then $k'k^{-1} = h'^{-1}h \in K \cap H$, $h' = h(h'^{-1}h)^{-1}$ and $k' = (h'^{-1}h)k$. This proves the claim.

Therefore for each $x \in HK$, $|\varphi^{-1}(x)| = |H \cap K|$. So,

$$|HK||H \cap K| = |H \times K| = |H||K|.$$

□

Proposition 1.7. *Let H and K be subgroups of a group G. The set HK is a subgroup of G if and only $HK = KH$.*

Proof. Suppose $h \in H$ and $k \in K$. Then $(hk)^{-1} = k^{-1}h^{-1} \in KH$. Thus $g \in HK$ if and only if $g^{-1} \in KH$. So, if HK is a subgroup then $HK = KH$.
Suppose $HK = KH$. Take $h_1, h_2 \in H$ and $k_1, k_2 \in K$. Consider $h_1k_1h_2k_2$. Since $k_1h_2 \in KH = HK$, there exist $h_3 \in H$ and $k_3 \in K$ such that $k_1h_2 = h_3k_3$. Thus $h_1(k_1h_2)k_2 = h_1(h_3k_3)k_2 \in HK$. So HK is closed under multiplication.
From above we know that if $g \in HK$ then $g^{-1} \in KH = HK$. Thus, since HK is non-empty, it is a subgroup of G. □

Definition 1.8. *Let G be a group and A a subgroup of G. The normaliser, $N_G(A)$, of A in G is the set of $x \in G$ such that $xAx^{-1} = A$.*

Remark 1.9. *Let $A \leq B \leq G$ be groups. Note that $N_G(A)$ is a subgroup of G containing A; in fact, it is the largest subgroup of G in which A is normal.*

The subgroup A is normal in B if and only if $B \leq N_G(A)$. In particular, A is normal in G if and only if $N_G(A) = G$. (Please convince yourself that this is true)

Corollary 1.10. *If H and K are subgroups of G and $H \leq N_G(K)$, then HK is a subgroup of G. In particular, if $K \trianglelefteq G$ then $HK \leq G$ for any $H \leq G$.*

Proof. It is enough to show that $HK = KH$. Suppose that $h \in H$ and $k \in K$. Then $h^{-1}kh, hkh^{-1} \in K$ since $H \leq N_G(K)$. Thus $hk = (hkh^{-1})h \in KH$ and $kh = h(h^{-1}kh) \in HK$. Thus $HK = KH$. □

2 Isomorphism theorems

Theorem 2.1. *If $\varphi : G \to H$ is a homomorphism of groups, then $ker\varphi \trianglelefteq G$ and*

$$G/ker\varphi \cong im\varphi.$$

Proof. We have already seen that the kernel of a homomorphism of groups is normal.
Define $f : G/\ker\varphi \to H$ by $f(a\ker\varphi) = \varphi(a)$.
This map is well-defined since: if $a\ker\varphi = b\ker\varphi$ then $ab^{-1} \in \ker\varphi$.
So $1 = \varphi(ab^{-1}) = \varphi(a)\varphi(b)^{-1}$. Thus $\varphi(a) = \varphi(b)$.
The map f is a homomorphism since:

$$f(a\ker\varphi b\ker\varphi) = f(ab\ker\varphi) = \varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b) = f(a\ker\varphi)f(b\ker\varphi).$$

The image of f is clearly equal to the image of φ. Lastly, f is injective for if $f(a\ker\varphi) = f(b\ker\varphi)$ then $\varphi(a) = \varphi(b)$ and so $\varphi(ab^{-1}) \in \ker\varphi$ i.e. $a\ker\varphi = b\ker\varphi$.
Thus f gives a bijective group homomorphism from $G/\ker\varphi$ to $\text{im}\varphi$. □

Corollary 2.2. *Let $\varphi : G \to H$ be a homomorphism of groups.*

1. *φ is injective if and only if $\ker\varphi = 1$*
2. *$[G : \ker] = |\varphi(G)|$*

Proof. (1) The forward direction follows directly from the definition of injective. Suppose $\ker\varphi = 1$ and $\varphi(a) = \varphi(b)$. Then $\varphi(ab^{-1}) = 1$. So $ab^{-1} = 1$ and thus $a = b$.
(2) $|G : \ker\varphi| = |G/\ker\varphi| = |\varphi(G)|$. □

Theorem 2.3 (The second isomorphism theorem)**.** *Let G be a group and let A and B be subgroups of G with $A \leq N_G(B)$. Then AB is a subgroup of G, $B \trianglelefteq AB$, $A \cap B \trianglelefteq A$ and $AB/B \cong A/A \cap B$.*

Proof. Since $A \leq N_G(B)$, AB is a subgroup of G. Since $B \leq N_G(B)$, $AB \leq N_G(B)$; that is B is normal in AB.
Consider the canonical projection $\pi : AB \to AB/B$. If $a \in A$ and $\pi(a) = 1$ then $a \in B$. Thus $a \in A \cap B$. So π restricted to A has kernel $A \cap B$ (and thus is normal). Now suppose $a \in A$ and $b \in B$. We have that $\pi(a) = \pi(ab)$. Thus π restricted to A is surjective i.e. $\text{im}\pi|_A = AB/B$. So by first iso theorem $AB/B \cong A/A \cap B$. □

Theorem 2.4 (The third isomorphism theorem)**.** *Let G be a group and let H and K be normal subgroups with $H \leq K$. Then $K/H \trianglelefteq G/H$ and*

$$(G/H)/(K/H) \cong G/K.$$

Proof. Consider the map $f : G/H \to G/K$ defined by $f(gH) = gK$.
This map is well defined: If $g_1H = g_2H$ then $g_1^{-1}g_2 \in H$ and thus $g_1^{-1}g_2 \in K$. So $g_1K = g_2K$.
This map is a group homomorphism since

$$f(aHbH) = f(abH) = abK = aKbK = f(aH)f(bH).$$

It is clearly surjective. Suppose $a \in G$. Then $f(aH) = 1K$ if only if $aK = 1K$; that is if and only if $a \in K$. Thus K/H is the kernel of f and so K/H is normal in G/H and

$$(G/H)/(K/H) \cong G/K$$

□

17. Script zur Vorlesung: Algebra (B III)
Prof. Dr. Salma Kuhlmann, Gabriel Lehéricy, Simon Müller
WS 2016/2017: 10. Januar 2017

1 Useful English/German Vocabulary

simple group -einfache Gruppe
normal series - Normalreihe
composition series - Kompositionsreihe
refinement - Verfeinerung

2 Isomorphism theorems continued

Theorem 2.1 (Lattice isomorphism theorem)**.** *Let G be a group and let N be a normal subgroup of G. If A is a subgroup of G containing N, let $\overline{A} := A/N$.Let $\pi : G \to G/N$ be the canonical projection.*

The map $A \mapsto \pi(A) = \overline{A}$ is a bijection between the set of subgroups of G containing N and the set of subgroups of G/N.

Moreover, if $A, B \leq G$ with $N \leq A$ and $N \leq B$ then:

1. *$A \leq B$ if and only if $\overline{A} \leq \overline{B}$; and in this case $[B : A] = [\overline{B} : \overline{A}]$*
2. *$A \lhd B$ is and only if $\overline{A} \lhd \overline{B}$; and in this case $B/A \cong \overline{B}/\overline{A}$*
3. *$\overline{\langle A, B\rangle} = \langle \overline{A}, \overline{B}\rangle$*
4. *$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cap \overline{B}$*

Proof. UB9 □

Theorem 2.2 (Butterfly Lemma /Zassenhaus Lemma)**.** *Let $a \lhd A$ and $b \lhd B$ be subgroups of a group G. Then*

$$a(A \cap b) \text{ is a normal in } a(A \cap B),$$

$$b(B \cap a) \text{ is normal in } b(B \cap A),$$

$$(A \cap b)(B \cap a) \text{ is normal in } (A \cap B)$$

and

$$\frac{a(A\cap B)}{a(A\cap b)} \cong \frac{(A\cap B)}{(A\cap b)(B\cap a)} \cong \frac{b(B\cap A)}{b(B\cap a)}.$$

Proof. Note first that since $A \leq N_G(a)$ and $B \leq N_G(b)$, we have that

$$A\cap b \leq A\cap B \leq N_G(a)$$

and

$$B\cap a \leq A\cap B \leq N_G(b).$$

Thus $a(A\cap b), a(A\cap B), b(B\cap a)$ and $b(B\cap A)$ are subgroups of G (see lecture 17 corollary 1.10).

We first show that

$$(A\cap b)(B\cap a) \text{ is normal in } (A\cap B).$$

First note that $A\cap b$ and $B\cap a$ are normal in $A\cap B$; if $g \in A\cap B$ and $c \in A\cap b$ then $gcg^{-1} \in b$ since $b \lhd B$ and $gcg^{-1} \in A$ since $g, c \in A$. Thus $(A\cap b)(B\cap a)$ is a subgroup of $A\cap B$. In fact it is a normal subgroup since if $c_1 \in A\cap b$, $c_2 \in B\cap a$ and $g \in A\cap B$ then $gc_1c_2g^{-1} = gc_1g^{-1}gc_2g^{-1} \in (A\cap b)(B\cap a)$.
If $x \in a(A\cap B)$ then $x = \alpha\gamma$ where $\alpha \in a$ and $\gamma \in A\cap B$. Define

$$f : a(A\cap B) \to \frac{A\cap B}{(A\cap b)(B\cap a)}$$

by

$$x \mapsto \gamma(A\cap b)(B\cap a).$$

The map f is well-defined for if $\alpha\gamma = \alpha'\gamma'$ with $\alpha, \alpha' \in a$ and $\gamma, \gamma' \in A\cap B$ then $\gamma'\gamma^{-1} = (\alpha')^{-1}\alpha \in a\cap A\cap B = a\cap B \leq (A\cap b)(B\cap a)$; i.e.

$$\gamma'(A\cap b)(B\cap a) = \gamma(A\cap b)(B\cap a)$$

The map is a homomorphism: if $\alpha, \alpha' \in a$ and $\gamma, \gamma' \in A \cap B$ then $\alpha, \gamma\alpha'\gamma^{-1} \in a$ since $a \lhd A$. So

$$f(\alpha\gamma\alpha'\gamma') = f((\alpha\gamma\alpha'\gamma^{-1})\gamma\gamma') = \gamma\gamma'(A \cap b)(B \cap a)$$

and since $(A \cap b)(B \cap a)$ is normal in $A \cap B$

$$f(\alpha\gamma)f(\alpha'\gamma') = \gamma(A \cap b)(B \cap a)\gamma'(A \cap b)(B \cap a) = \gamma\gamma'(A \cap b)(B \cap a).$$

The map f is surjective by definition.

It remains to find the kernel: if $\alpha \in a$ and $\gamma \in A \cap B$ are such that $f(\alpha\gamma) = 1(A \cap b)(B \cap a)$ then $\gamma \in (A \cap b)(B \cap a) = (B \cap a)(A \cap b)$. Take $x \in (B \cap a)$ and $y \in (A \cap b)$ such that $\gamma = xy$. Then $\alpha\gamma = (ax)y \in a(A \cap b)$.
Conversely, if $\alpha \in a$ and $\gamma \in A \cap B$ with $\alpha\gamma \in a(A \cap b)$ then there exist $t \in a$ and $s \in A \cap b$ such that $\alpha\gamma = ts$. Now $\alpha^{-1}t \in a$ and since $\gamma, s \in B$, $\alpha^{-1}t = \gamma s^{-1} \in B$. Thus $\alpha^{-1}ts = \gamma \in (A \cap b)(B \cap a)$. So $\alpha\gamma \in \ker f$.

So by the first isomorphism theorem, $a(A \cap b)$ is normal in $a(A \cap B)$ and

$$\frac{a(A \cap B)}{a(A \cap b)} \cong \frac{(A \cap B)}{(A \cap b)(B \cap a)}.$$

Exchanging the roles of A and B respectively a and b, we get that $b(B \cap a)$ is normal in $b(B \cap A)$ and

$$\frac{b(A \cap B)}{b(B \cap a)} \cong \frac{(A \cap B)}{(A \cap b)(B \cap a)}.$$

□

3 Jordan-Hölder and Simple and Solvable groups

Definition 3.1. *A group G is simple if $|G| > 1$ and the only normal subgroups of G are 1 and G.*

Remark: A non-trivial abelian group G is simple if and only if its only subgroups are 1 and G (recall: all subgroups of abelian groups are normal).

Thus, if G is simple and abelian then it is generated by every non-identity element of G. So G is cyclic. Recall that if G is infinite and x generates G then x^2 does not generate G (lecture 15 Proposition 5(1)). Thus G is finite. Moreover, if $p \in \mathbb{N}$, a prime, divides $|x|$ then $|x^p| < |x|$ (see lecture 15 Proposition 4(3)) and therefore $x^p = 1$. Thus $|G| = p$. Thus an abelian group is simple if and only if it is finite and of prime order.

Definition 3.2. *Let G be a group. A sequence of subgroups*

$$1 = G_0 \leq G_1 \leq ... \leq G_s = G$$

*is called a **normal series** if G_i is normal in G_{i+1}; we call the quotient groups G_{i+1}/G_i **factor groups** of the series.*

*A normal series is called a **composition series** if each of the quotient groups G_{i+1}/G_i are simple; in this case we call the quotient groups **composition factors** of G (we will see later that the factor groups really do only depend on G).*

A normal series

$$1 = G_0 \lhd G_1 \lhd ... \lhd G_s = G$$

*is a **refinement** of a normal series*

$$1 = H_0 \lhd H_1 \lhd ... \lhd H_r = G$$

if $H_0, ..., H_r$ *is a subsequence of* $G_0, ..., G_s$.

Example: Since A_4 is index 2 in S_4, A_4 is normal in S_4. You will show on the exercise sheet that the subgroup

$$V := \{(12)(34), (13)(24), (14)(23), e\}$$

is normal in A_4. So

$$\{1\} \lhd V \lhd A_4 \lhd S_4$$

is a normal series for S_4. Its factor groups are $\mathbb{Z}_2$ and $\mathbb{Z}_3$. So it is in fact a composition series.

Definition 3.3. *Two normal series are said to be* ***equivalent*** *if there is a bijection between their factor groups such that corresponding factor groups are isomorphic.*

Example:
Consider the following two composition series of $\mathbb{Z}_{30}$:

$$\mathbb{Z}_{30} \geq \langle 5 \rangle \geq \langle 10 \rangle \geq \{0\}$$
$$\mathbb{Z}_{30} \geq \langle 3 \rangle \geq \langle 6 \rangle \geq \{0\}$$

The composition factors of the first series are $\mathbb{Z}_{30}/\langle 5 \rangle \cong \mathbb{Z}_5$, $\langle 5 \rangle/\langle 10 \rangle \cong \mathbb{Z}_2$ and $\langle 10 \rangle/\{0\} \cong \mathbb{Z}_3$.
The composition factors of the second series are $\mathbb{Z}_{30}/\langle 3 \rangle \cong \mathbb{Z}_3$, $\langle 3 \rangle/\langle 6 \rangle \cong \mathbb{Z}_2$ and $\langle 6 \rangle/\{0\} \cong \mathbb{Z}_5$.
So the above composition series are equivalent.

Theorem 3.4 (Schreier Refinement Theorem)**.** *Any two normal series of a group* G *have equivalent refinements.*

Proof. Let

$$1 = G_0 \lhd G_1 \lhd ... \lhd G_s = G$$

and

$$1 = H_0 \lhd H_1 \lhd ... \lhd H_r = G$$

be normal series.
Let $G_{i,j} := G_i(G_{i+1} \cap H_j)$ for $0 \leq j \leq r$. So

$$G_{i,0} = G_i\{1\} = G_i \text{ and } G_{i,r} = G_i(G_{i+1} \cap G) = G_{i+1}.$$

Since $G_i \lhd G_{i+1}$ and $H_j \lhd H_{j+1}$, by Zassenhaus (with $a = G_i, A = G_{i+1}, b = H_j$ and $B = H_{j+1}$),

$$G_{i,j} = G_i(G_{i+1} \cap H_j) \lhd G_i(G_{i+1} \cap H_{j+1}) = G_{i,j+1}.$$

Thus the following series is a refinement of the first normal series:

$$\{1\} = G_{0,0} \lhd G_{0,1} \lhd ... \lhd G_{0,r} = G_{1,0} \lhd G_{1,1} \lhd ... \lhd G_{s-1,r} = G_s = G$$

Let $H_{i,j} := H_i(H_{i+1} \cap G_j)$ for $0 \leq j \leq s$.
Exactly as above,

$$\{1\} = H_{0,0} \lhd H_{0,1} \lhd ... \lhd H_{0,s} = H_{1,0} \lhd H_{1,1} \lhd ... \lhd H_{r-1,s} = H_r = G$$

is a refinement of the second normal series.
It remains now just to note that by the Zassenhaus lemma (with $a = G_i, A = G_{i+1}, b = H_j$ and $B = H_{j+1}$)

$$G_i(G_{i+1} \cap H_{j+1})/G_i(G_{i+1} \cap H_j) \cong H_j(H_{j+1} \cap G_{i+1})/H_j(H_{j+1} \cap G_i);$$

that is

$$G_{i,j+1}/G_{i,j} \cong H_{j,i+1}/H_{j,i}.$$

□

Theorem 3.5 (Jordan-Hölder Theorem)**.** *Let G be a finite group with $G \neq \{1\}$. Then*

1. *G has a composition series and*

2. *all composition series of G are equivalent.*

Proof. (1) Suppose G is not simple. If N is a maximal normal subgroup of G then, by the correspondence theorem, G/N is simple. If G is finite G has a maximal normal subgroup. Thus, by induction on $|G|$, every finite group has a composition series.
(2)Composition series have no refinements by the correspondence theorem; that is, if $G_{i+1} \rhd N \rhd G_i$ then $N/G_i \lhd G_{i+1}/G_i$ and if G_{i+1}/G_i is simple then $N = G_{i+1}$ or $N = G_i$. By the Schreier Refinement Theorem, every two normal series have equivalent refinements. Thus every two composition series of G are equivalent.

□

18. Script zur Vorlesung: Algebra (B III)

Prof. Dr. Salma Kuhlmann, Gabriel Lehéricy, Simon Müller

WS 2016/2017: 13. Januar 2017

In dieser Vorlesung wurde hauptsächlich die 17.Vorlesung kurz wiederholt und die Begriffe auf Deutsch nochmals zusammengefasst.

Definition 1

(1) Eine Gruppe $G \neq \{1\}$ ist *einfach*, wenn die einzigen Normalteiler nur $\{1\}$ und G sind.

(2) $\{1\} = H_0 \leq \cdots \leq H_s = G$ ist eine *Normalreihe*, wenn $H_i \lhd H_{i+1}$.
Notation: $H \lhd G$ "H Normalteiler in G" wird auch so bezeichnet: $G \rhd H$ "$H \leq G$ ist Normateiler"

(3) $H_{i+1}/H_i; i = 0, \ldots, s-1$ sind die *Faktorgruppen* oder die *Faktoren* oder die *Quotienten* der Normalreihe

(4) Die Normalreihe heißt *Kompositionsreihe*, falls alle Faktoren einfach sind.

(5) Zwei Reihen
$$H_0 \lhd \cdots, \lhd H_i \lhd H_{i+1} \lhd \cdots \lhd G$$
und $\quad K_0 \lhd \cdots, \lhd K_j \lhd K_{j+1} \lhd \cdots \lhd G$
sind *äquivalent*, wenn es eine Bijektion $i \to j$ gibt, so dass die korrespondierenden Faktoren isomorph sind: $H_{i+1}/H_i \simeq K_{j+1}/K_j$.

(Ende der Wiederholung der 17. Vorlesung.)

Definition 2

G heißt *auflösbar* (englisch: solvable), wenn es eine *Normalereihe mit abelschen Faktoren hat.*

Erinnerung

(*i*) S_n ist nicht abelsch für $n \geq 3$.

(*ii*) A_n ist nicht abelsch für $n \geq 4$.
Begründung: (123) und (234) kommutieren nicht.

Beispiele

S_n ist auflösbar für $n \leq 4$

(*a*) $S_3 \rhd A_3 \rhd \{1\}$
$| S_3/A_3 | = 2 \qquad | A_3/\{1\} | = 3$: Diese zwei Gruppen haben als Ordnung eine Primzahl. Es folgt aus Lagrange, dass die Gruppen zyklisch sind, also abelsch.

(*b*) $S_4 \rhd A_4 \rhd V \rhd W \rhd \{1\}$, wobei $V = \{(1), (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$ die *kleinsche Vierergruppe* ist und $W := \{1, (12)(34)\}$.
$| S_4/A_4 | = 2 \qquad | A_4/V | = 3 \qquad | V/W | = 2.$

19. Script zur Vorlesung: Algebra (B III)

Prof. Dr. Salma Kuhlmann, Gabriel Lehéricy, Simon Müller

WS 2016/2017: 17. Januar 2017

Wir werden später zeigen, dass S_n nicht auflösbar ist für $n \geq 5$ (Galois).

Bemerkung
Jede abelsche Gruppe ist trivialerweise auflösbar. Betrachte $G \rhd \{1\}$.

Wir wollen nun auflösbare Gruppen charakterisieren.

Definition 1

(a) Für $g, h \in G$ definiere $(g,h) := g^{-1}h^{-1}gh \in G$. (g,h) heißt *Kommutator* von g und h.

Bemerkung 1

(i) $gh = hg(g,h)$

(ii) (G,G) ist die *Kommutatorgruppe* von G und ist die Untergruppe, die durch $S := \{(g,h); g,h \in G\}$ erzeugt wird.

Bemerkung 2

(i) $(g,h) = (h,g)^{-1}$, also ist $< S >= \{S_1 \cdots S_n \mid n \in \mathbb{N};\ S_i \text{ ist ein Kommutator in } G\}$.

(ii) G ist abelsch genau dann, wenn $(G,G) = \{1\}$.

Notation: $(G,G) := G'$.

(b) Wir definieren die iterierte Kommutatoren folgendermaßen: $G'' := (G')'$.
Per Induktion über $k \in \mathbb{N}$: $G^{(k)} := (G^{(k-1)})'$.

Wir werden nun die iterierte Kommutatoren ausnutzen, um unsere Charakterisierung zu geben.

Proposition 1
Seien $G, \overline{G}$ Gruppen und $\eta : G \to \overline{G}$ ein Homomorphismus. Es gelten

1. $\eta(g,h) = (\eta(g), \eta(h))$
2. $\eta(G') \subseteq \overline{G}'$
3. Wenn η surjektiv ist, gilt ferner: $\eta(G') = \overline{G}'$
4. Insbesondere für einen beliebigen Homomorphismus η gilt: $\eta(G') = \eta(G)'$

Zusatz: 5. Allgemeiner gilt $\eta(G^{(k)}) = \eta(G)^{(k)}$ für alle $k \in \mathbb{N}$

Beweis

1. $\eta(g,h) = \eta(g^{-1}h^{-1}gh) = \eta(g)^{-1}\eta(h)^{-1}\eta(g)\eta(h) = (\eta(g),\eta(h))$.
2. Also aus 1. folgt unmittelbar $\eta(G') \subseteq \overline{G}'$.
3. Wenn η surjektiv ist, folgt aus 1. dass jeder Kommutator in $\overline{G}$ liegt in $\eta(G')$. Es folgt also aus Bemerkung 2, dass $\eta(G') \supseteq \overline{G}'$ und damit ist die Gleichheit bewiesen.
4. Klar, da $\eta : G \to \eta(G)$ surjektiv ist.
5. $\eta(G') = \eta(G)'$ ist 4.
   Nun betrachte $\eta : G' \to \overline{G}$ und 4. nochmal angewendet ergibt:
   $$\eta((G')') = \eta(G')'$$
   i.e. $\eta(G'') = (\eta(G)')' = \eta(G)''$
   usw. per Induktion fortsetzen. □

Proposition 2

$K \lhd G \Rightarrow K' \lhd G$ (insbesondere: $G' \lhd G$).

Beweis

Sei $a \in G$ fest und betrachte $\eta_a : K \to K$, $k \mapsto aka^{-1}$ wohldefiniert (weil K ein Normalteiler) und ein Homomorphismus.
Aus Proposition 1 folgt: $\eta_a(K') \subseteq K'$ für alle $a \in G$, aber das bedeutet $K' \lhd G$. □

Wir haben also $G \rhd G' \rhd G'' \rhd \cdots \rhd G^{(k)} \rhd G^{(k+1)} \rhd \cdots$.
Wir wollen zeigen, dass G auflösbar ist $\Leftrightarrow \exists k \geq 1$ mit $G^{(k)} = \{1\}$.
Dafür brauchen wir:

Lemma

Sei $K \lhd G$. Es gilt G/K ist abelsch $\Leftrightarrow K \supseteq G'$. Insbesondere G/G' ist abelsch und G' ist die kleinste normale Untergruppe mit dieser Eigenschaft.

Beweis

Aus Bemerkung 2 folgt: G/K ist abelsch $\Leftrightarrow (G/K)' = \{1\} \Leftrightarrow (gK, hK) = 1$ für alle $g, h \in G$.
Aber $(gK, hK) = (gK)^{-1}(hK)^{-1}gKhK = (g^{-1}h^{-1}gh)K = (g,h)K$. Also ist G/K abelsch $\Leftrightarrow (g,h)K = K$ für alle $g, h \in G \Leftrightarrow (g,h) \in K$ für alle $g, h \in G \Leftrightarrow G' \subseteq K$.

Bemerkung 3

Wir erhalten $G^{(k)}/G^{(k+1)}$ ist abelsch für alle $k \in \mathbb{N}$.

Satz 1

G ist auflösbar $\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N}$ mit $G^{(k)} = 1$.

Beweis

In der nächsten Vorlesung.

Bemwerkung 4
"$\Leftarrow$" folgt unmittelbar aus Bemerkung 3.

Bemerkung 5
Sei $H \leq G$. Es folgt $H^{(l)} \leq G^{(l)}$ für alle $l \in \mathbb{N}$.

20. Script zur Vorlesung: Algebra (B III)

Prof. Dr. Salma Kuhlmann, Gabriel Lehéricy, Simon Müller

WS 2016/2017: 20. Januar 2017

Satz 1

G ist auflösbar $\Leftrightarrow$ es existiert ein $k \in \mathbb{N}$ mit $G^{(k)} = 1$.

Beweis

"$\Leftarrow$" Die Normalreihe $G \rhd G' \rhd \cdots$ hat abelsche Faktoren.

"$\Rightarrow$" Sei $G = G_1 \rhd \cdots \rhd G_s \rhd G_{s+1} = \{1\}$ eine Normalreihe mit abelschen Faktoren G_i/G_{i+1}.
Lemma (20. Vorlesung) $\Rightarrow G_{i+1} \supseteq G_i'$ für alle i.

Behauptung $G_i \supset G^{(i)}$ für alle i. Bei $i = 1$ gilt $G = G_1 \supset G'$ ✓

Induktionsannahme für k ✓

Induktionsschritt für $k+1$: $G_{k+1} \supseteq (G_k)' \supseteq (G^{(k)})' = G^{(k+1)}$

Da $G_{s+1} = \{1\}$ folgt insbesondere $G^{(s+1)} = \{1\}$ □

Satz 2

Sei G auflösbar.

(1) Sei $H \leq G$. Dann ist H auflösbar.

(2) Sei $\eta : G \twoheadrightarrow H$ eine surjektive Homorphie, dann ist H auflösbar.

(3) **Zusatz:** Sei G eine beliebige Gruppe und $K \lhd G$, so dass K und G/K auflösbar sind, dann ist G auch auflösbar.

Beweis

(1) $H \subseteq G \Rightarrow H^{(i)} \subseteq G^{(i)}$, also $G^{(k)} = \{1\} \Rightarrow H^{(k)} = \{1\}$.

(2) $\eta(G^{(i)}) = \eta(G)^{(i)}$. Also $G^{(k)} = \{1\} \Rightarrow \eta(G)^{(k)} = \{1\}$. Also $H^{(k)} = \{1\}$.

(3) Sei $\pi : G \twoheadrightarrow G/K$ die kanonische Projektion. Es gilt $\pi(G^{(i)}) = (G/K)^{(i)}$. Nun ist G/K auflösbar $\Rightarrow \exists k$ mit $\pi(G^{(k)}) = (G/K)^{(k)} = \{1\}$, i.e. für alle $x \in G^{(k)}$ gilt $xK = K$, i.e. für alle $x \in G^{(k)}$ gilt $x \in K$, i.e. $G^{(k)} \subset K$. Nun ist aber auch K auflösbar, also existiert ℓ mit $G^{(k+\ell)} = (G^{(k)})^{\ell} \subseteq K^{(\ell)} = \{1\}$. □

Bemerkungen

1. Eine endliche abelsche Gruppe $G \neq \{1\}$, die einfach ist, ist zyklisch mit Primordnung.

   Beweis Da jede Untergruppe normal ist, G aber einfach, folgt daraus, dass die einzigen Untergruppen $\{1\}$ und G sind. Sei $x \neq 1$ mit $x \in G$, also $< x >= G$, so ist G zyklisch. Wenn $|G|$ **keine** Primzahl ist, dann gibt es eine Primzahl p mit $p||G|$ und damit eine zyklische Untergruppte $H \leq G$ mit $1 < |H| = p < |G|$ - Widerspruch. □

2. G ist auflösbar und einfach $\Rightarrow G$ ist abelsch.

   Beweis $G \rhd \{1\}$ ist die einzig mögliche Normalreihe. □

Satz 3

Eine endliche Gruppe ist auflösbar $\Leftrightarrow$ jeder Kompositionsfaktor einer Kompositionsreihe ist zyklisch mit Primordnung.

Beweis

"$\Rightarrow$" G ist auflösbar; sei $G = G_1 \rhd \cdots \rhd G_{s+1} = \{1\}$ eine Kompositionsreihe. Nun ist auch G_i/G_{i+1} auflösbar (siehe Satz 2 Nr. (1) und (2)) und einfach $\Rightarrow G_i/G_{i+1}$ sind abelsch, also zyklisch mit Primordnung (siehe Bemerkungen 1. und 2.).

"$\Leftarrow$" Sei

$$G = G_1 \rhd \cdots \rhd G_{s+1} = \{1\} \qquad (*)$$

eine Kompositionsreihe (ex. wegen Jordan Hölder) mit G_i/G_{i+1} zyklisch mit Primordnung. Dann ist insbesondere G_i/G_{i+1} abelsch und damit ist die Reihe $(*)$ sogar eine auflösbare Reihe. □.

Erinnerung

Ex. 4.1 (b) Lineare Algebra II: $n \geq 3$. A_n ist von 3-Zykeln erzeugt.

Satz 4

A_n ist einfach für $n \geq 5$.

Beweis

Sei $K \neq \{1\}, K \lhd A_n$. Zu zeigen: $K = A_n$.

Behauptung 1 Wenn K ein 3-Zykel enthält, dann enthält K alle 3-Zykeln.

Beweis Sei $(123) \in K$ und (ijk) beliebig.

$\gamma := \begin{pmatrix} 12345\cdots \\ ijklm\cdots \end{pmatrix}$ Es gilt $\gamma(123)\gamma^{-1} = (ijk)$ $(*)$

Ohne Einschränkung gilt $\gamma \in A_n$ (sonst ersetze durch $(lm)\gamma$).

Nun ist K normal $\Rightarrow (ijk) \in K$ wegen $(*)$. □

Behauptung 2 K enthält ein 3-Zykel.

Beweis Sei $\alpha \in K \lhd A_n; \alpha \neq 1$ mit maximaler Anzahl von Fixpunkten.

Wir zeigen: α ist ein 3-Zykel, sonst schreibe

(a) $\alpha = (123\cdots)\cdots$ oder

(b) $\alpha = (12)(34)\cdots$

als Produkt disjunkter Zykeln.

(Beobachte, dass im Fall (a) α noch zwei Zahlen bewegen muss, sonst ist $\alpha = (123k)$ eine ungerade Permutation - Widerspruch.)

Setze $\beta := (345)$ und betrachte $\alpha_1 := \beta\alpha\beta^{-1}$ ($\alpha_1 \in K$, weil $\alpha \in K$ und $K \lhd A_n$).

Direktes Rechnen zeigt:

$\alpha_1 = (124\cdots)\cdots$ im Fall (a) und

$\alpha_1 = (12)(45)\cdots$ im Fall (b).

Auf jeden Fall ist $\alpha_1 \neq \alpha$ und damit $\alpha_2 := \alpha_1\alpha^{-1} \neq 1$. ($\alpha_2 \in K$).

Nun ist jede $\ell > 5$ durch β fixiert. Beobachte, dass falls ℓ auch durch α fixiert ist, ℓ auch durch α_2 fixiert ist.

Direktes Rechnen im Fall (a) zeigt $\alpha_2(2) = 2$ und außerdem bewegt α in diesem Fall $1, 2, 3, 4, 5$. Also hat α_2 einen extra Fixpunkt (nämlich 2) und $\alpha_2 \in K$ - Widerspurch.

Direktes Rechnen im Fall (b) zeigt $\alpha_2(1) = 1$ und $\alpha_2(2) = 2$ - Widerspruch. □

Korollar

S_n ist **nicht** auflösbar für $n \geq 5$.

Beweis

Sonst wäre A_n auflösbar, aber A_n ist einfach $\Rightarrow A_n$ ist abelsch - Widerspruch. □

21. Script zur Vorlesung: Algebra (B III)

Prof. Dr. Salma Kuhlmann, Gabriel Lehéricy, Simon Müller

WS 2016/2017: 24. Januar 2017

Unser nächstes Ziel ist es, die Sylow Sätze zu beweisen (Sonderfälle, für die die Umkehrung von Lagrange gilt).

Sylow 1
Sei G eine endliche Gruppe, p Primzahl und $k \in \mathbb{N}$, so dass $p^k || |G|$, dann hat G eine Teilgruppe der Ordnung p^k.

Definition 1
Eine solche Teilgruppe H mit $H = p^m$, m maximal, ist eine *Sylow-p-Untergruppe*.

Sylow 2
(1) Sylow-p-Untergruppen sind konjugiert, das heißt es existiert $a \in G$ mit $H_2 = aH_1a^{-1}$.

(2) Die Anzahl der Sylow-p-Untergruppen ist ein Divisor von $[G : H]$ für eine (jede) Sylow-p-Untergruppe H und ist $\equiv 1 \mod p$.

(3) Jede Untergruppe der Ordnung p^k ist enthalten in einer Sylow-p-Untergruppe.

Für die Beweise der Sylow-Sätze brauchen wir Gruppenaktionen:
Definition 2
Sei G eine Gruppe und S eine Menge ($S \neq \emptyset$).
$G \times S \to S$
$(g, x) \mapsto gx$
eine Abbildung, so dass

(i) $1x = x$ für alle $x \in S$

(ii) $g_1g_2x = g_1(g_2x)$ für alle $x \in S$ und für alle $g_1, g_2 \in G$.

heißt *Gruppenaktion*. Wir sagen G *operiert auf* S.

Definition 3
Sei G operiert auf S und auf S'. Die Aktionen heißen *äquivalent*, wenn es eine Bijektion $\nu : S \to S'$ gibt pd. $\nu(gx) = g\nu(x)$ für alle $g \in G$ und $x \in S$.

Proposition 1
Sei G operiert auf S. Definiere

$$\begin{array}{rccc} T(g): & S & \longrightarrow & S \\ & x & \mapsto & gx \end{array}$$

Dann ist $T(g)$ eine Permutation auf S.

Notation
$Sym\ S$ bezeichnet die Gruppe der Permutationen von S.

Fortsetzung mit Ansatz von Proposition 1:
Proposition 2
Die Abbildung

$$\begin{array}{rccc} T: & G & \longrightarrow & SymS \\ & g & \mapsto & T(g) \end{array}$$

ist ein Gruppenhomomorphismus.

Definition 4
$\ker T \lhd G$ heißt der ker der Aktion. Die Aktion heißt *effektiv*, wenn $\ker T = \{1\}$.

Beispiele

(0) G operiert auf S und $H \leq G \Rightarrow H$ operiert auf S (durch Einschränkung)
G operiert auf S und $\mathcal{O} \subseteq S \Rightarrow G$ operiert auf $\mathcal{O}$ (auch Einschränkung, wenn wohldefiniert!)

(i) $S = G$. Definiere die Aktion "*linke Multiplikation*":
$(g, x) \mapsto \underbrace{gx}_{\text{Produkt in } G}$ ist eine effektive Aktion.

(ii) Dual dazu "rechte Multiplikation"

(iii) Konjugation: $S = G; (g, x) \mapsto gxg^{-1}$.
Was ist hier der ker dieser Aktion?

$$\begin{array}{rcl} \ker T & = & \{g \mid \ \forall x \in G : gxg^{-1} = x\} \\ & = & \{g \mid \ \forall x \in G : gx = xg\} \\ & := & C_G \end{array}$$

C_G heißt *Zentrum von* G und ist eine normale Untergruppe.

Definition 5
$H \leq Sym\ S$ heißt Permutationsgruppe.

Satz (Cayley)
Jede Grupe ist isomorph zu einer Permutationsgruppe.

Beweis

$S = G$ operiert mit der linken Multiplikation auf G.

$$\begin{array}{rccc} T: & G & \longrightarrow & Sym\ G \\ & g & \mapsto & T(g) \end{array}$$

hat trivialen $\ker T = \{1\}$. Also $G \simeq T(G) \leq Sym\ G$. □

Äquivalenzrelation durch Aktion induziert

1. Seien $x, y \in S$. Setze $x \underset{G}{\sim} y$, wenn es ein $g \in G$ gibt, s.d. $y = gx$.
   $\underset{G}{\sim}$ ist eine Äquivalenzrelation.
2. $[x] := Gx := \{gx \mid g \in G\}$ heißt die *Orbit* oder *Bahn von x*.
3. $S = \bigsqcup_{x \in S} Gx$.

Beispiele (Fortsetzung)

(*i*) Sei $H \leq G, S = G$. H operiert durch linke Multiplikation $[x] = Hx = \{hx \mid h \in H\}$ (die Nebenklasse von x).

(*ii*) G operiert auf G durch Konjugation $[x] = \{gxg^{-1} \mid g \in G\}$ heißt die *Konjukationsklasse*.

Proposition 3

(*i*) Die Konjugationsklasse von x ist $\{x\}$ genau dann, wenn $x \in C_G$.

(*ii*) Also ist das Zentrum von G die Vereinigung solcher Konjugationsklassen.

Definition 1

1. G *operiert transitiv* auf S, wenn es nur eine Bahn gibt, das heißt für alle $x, y \in S : x \underset{G}{\sim} y$.
2. Der *Stabilisator* $Stab_x := \{g \in G \mid gx = x\}$ ist eine Untergruppe von G für jedes $x \in S$.

Beispiel 1

G operiert auf G durch Konjugation ⇒
$Stab_x = \{g \in G \mid gxg^{-1} = x\} = C(x) = \{g \in G \mid gx = xg\}$, der Zentralisator von x in G.

Bemerkung

(*i*) Wenn $y = ax$, dann ist $Stab_x = a^{-1}(Stab_y)a$.

(*ii*) Also wenn G auf S transitiv operiert, gilt für alle $x, y \in S$, dass $a \in G$ existiert, so dass $Stab_y = a(Stab_x)a^{-1}$

Beispiel 2

$H \leq G$ operiert transitiv auf $S := \{xH \mid x \in G\}$ mit $g(xH) := (gx)H$.

Beweis

Seien $xH, yH \in S$. Setze $g := yx^{-1}$, dann gilt $gxH = yH$. □

Wir zeigen, dass bis auf Äquivalenz von Aktionen, alle transitive Aktionen so sind.

Satz 1
Es sei G operiert transitiv auf $S \neq \emptyset$. Sei $x \in S$ und $H := Stab_x$. Dann ist die Aktion äquivalent zur Aktion auf $\overline{G} := \{gH \mid g \in G\}$.

Beweis
Definierte $\overline{\alpha} : \overline{G} \to S$ mit $\overline{\alpha}(\overline{g}) := gx$, wobei $\overline{g} := \{a \in G \mid ax = gx\} = \{a \in G \mid g^{-1}a \in H\} = gH$ und $\overline{G} := \{\overline{g} \mid g \in G\}$ ist. Die Aktion ist transitiv $\Rightarrow \overline{\alpha}$ surjektiv.

Übungsaufgabe
$\overline{\alpha}$ ist wohldefiniert und bijektiv. Wir müssen noch prüfen, ob $\overline{\alpha}(h\overline{g}) \stackrel{?}{=} h\overline{\alpha}(\overline{g})$.

Korollar 1
Es sei G endlich, operiert transitiv auf S. Dann ist $|S| = [G : Stab_x]$ für ein (jedes) $x \in S$, insbesondere ist S endlich und $|S| \mid |G|$.

Algemeiner können wir ein Resultat für eine beliebige Aktion herleiten:
Korollar 2 (Bahngleichung)
Es sei G endlich operiert auf S endlich. Es gilt $|S| = \sum_{i=1}^{r} [G : Stab_{x_i}]$, wobei $\{x_1, \ldots, x_r\}$ ein Vertretersystem der Bahnen ist.

Beweis
Seien $\mathcal{O}_1, \ldots, \mathcal{O}_r$ alle Bahnen. Es ist leicht zu sehen, dass die Aktion auf $\mathcal{O}_i$ transitiv ist für jedes $i = 1, \ldots, r$. Also gilt $|\mathcal{O}_i| = [G : Stab_{x_i}]$. Nun ist $S = \bigsqcup_{i=1}^{r} \mathcal{O}_i$, also $|S| = \sum |\mathcal{O}_i|$. □

Korollar 3 (Klassengleichung)
Sei G eine endliche Gruppe. Es gilt $|G| = \sum_{i=1}^{k} [G : C(x_i)]$, wobei $\{x_1, \ldots, x_k\}$ ein Vetretersystem der Konjukationsklassen ist.

Beweis
G operiert auf G durch Konjugation und $Stab_{x_i} = C(x_i)$ in diesem Fall. □

Korollar 4 (Klassengleichung Bis.)
$|G| = |C_G| + \sum_{i=1}^{\ell} [G : C(y_i)]$, wobei $\{y_1, \ldots, y_\ell\}$ ein Vertretersystem für die Konjugationsklassen in $G \backslash C_G$ ist.

Beweis
Die Konjugationsklassen von x ist $\{x\}$ genau dann, wenn $x \in C_G$ genau dann, wenn $C(x) = G$. In Korollar 3 wird also in der Formel $1 = [G : G] = [G : C(x_i)]$ so oft summiert wie es Elemente in C_G gibt. Also erhalten wir $|C_G|$ als ersten Summand. □

Korollar 5
Sei G endlich, $|G| = p^k, p$ ist Primzahl und $k \in \mathbb{N}$. Es gilt $C_G \neq \{1\}$.

Siehe Übungsblatt

22. Script zur Vorlesung: Algebra (B III)

Prof. Dr. Salma Kuhlmann, Gabriel Lehéricy, Simon Müller

Vertretung: Gabriel Lehéricy

WS 2016/2017: 27. Januar 2017

Kapitel 5: Beweise der Sylow-Sätze

Beweis von Sylow 1

Induktion nach $|G|$. $|G| = 1$ - klar.

Induktionsannahme: Sylow 1 gilt für alle Gruppen der Ordnung $< |G|$.

Induktionsschritt: Wir werden "Cauchy's Satz" benutzen:

Sei G eine endliche abelsche Gruppe, $p \in \mathbb{N}$ eine Primzahl und $p||G|$. Dann existiert ein $x \in G$ mit $|x| = p$.

Betrachte die Klassengleichung $|G| = |C_G| + \sum_{y_i \notin C_G} [G : C(y_i)]$ und beachte, dass $C := C_G$ abelsch ist. Zwei Fälle sind zu betrachten:

Fall 1

$p \nmid |C| \Rightarrow \exists j$ mit $p \nmid [G : C(y_j)]$. Aber $p^k \mid |G| = [G : C(y_j)] \mid C(y_j) \mid$. Also $p^k \mid |C(y_j)|$. Nun ist $|C(y_j)| < |G|$, da $y_j \notin C$ ist.

Induktionsannahme $\Rightarrow C(y_j)$ besitzt eine Untergruppe der Ordnung p^k.

Fall 2

$p \mid |C| \Rightarrow$ Cauchy's Satz liefert ein Element c der Ordnung p.

Nun ist $< c > \lhd G, | < c > | = p$. Betrachte die Gruppe $G/ < c >$ der Ordnung $\frac{|G|}{|<c>|} = \frac{|G|}{p}$. Also $p^{k-1} \mid |\frac{G}{<c>}|$.

Induktionsannahme $\Rightarrow \exists$ eine Untergruppe von $G/ < c >$ der Ordnung p^{k-1}. Nun haben die Untergruppen von $G/ < c >$ die Gestalt $H/ < c >$, wobei $H \leq G$ und $< c > \leq H$.

Also existiert $H \leq G$ mit $|H/ < c > | = p^{k-1}$ und damit ist

$|H| = |H/ < c > | \, | < c > | = p^{k-1}.p = p^k$. □

Beweis von Sylow 2

Wir benötigen eine

Bemerkung

Sei $H \leq G$ und $g \in G$, dann ist gHg^{-1} auch eine $\leq G$. Also haben wir eine Aktion von G auf $\Gamma :=$ die Menge der Untergruppen von G durch Konjugation.

- Für die Aktion berechnen wir $(H \in \Gamma)$ $Stab_H := \{g \in G | gHg^{-1} = H\} := N(H)$ der Normalisator von H in G.
- Beachte: $H \lhd N(H)$.
- Wir berechnen die Bahnen $\mathcal{O}_H = \{gHg^{-1} \mid g \in G\}, H \in \Gamma$.
  Korollar 1 (letzte Vorlesung) liefert $|\mathcal{O}_H| = [G : N(H)]$
  und $[G : H] = [G : N(H)][N(H) : H]$, so ist $|\mathcal{O}_H| \mid [G : H]$.
- Zum Spezialisieren dieser Aktion auf die Mengen $\Pi \subseteq \Gamma$ der Sylow-p-Untergruppen von G. Die Aktion auf Π ist wohldefiniert, weil $gHg^{-1} \in \Pi$, wenn $H \in \Pi$.

Wir bekommen ein:

Hilfslemma

(*i*) Sei $P \in \Pi, H \leq N(P)$ und $|H| = p^j$, dann ist $H \leq P$. Es folgt:

(*ii*) P ist eine Sylow-p-Untergruppe von $N(P)$ und die einzige.

Beweis

$$\left.\begin{array}{ll} H \leq N(P) & \text{und} \\ P \lhd N(P) & \end{array}\right\} \Rightarrow HP \text{ ist Untergruppe und } HP/P \simeq H/(H \cap P)$$

(Isomorphie-Satz). Also ist HP/P isomorph zu einer Faktorgruppe von H und damit hat sie die Ordnung $|HP| = p^k$ für ein geeignetes k. Also $|HP| = p^k||P|$.
Da aber P eine Sylow-p-Untergruppe ist, müssen wir $k = 0$ haben,
i.e. $HP = P$, so dass $H \leq P$. $\square$

Beweis von Sylow 2 - Fortsetzung
Wir betrachten eine Bahn $\sum$.
Fall 1
Sei $P \in \sum$ und betrachte die Atkion von P auf $\sum$. Wir bekommen eine Partition von $\sum$ in P-Bahnen.

- Betrachte die Bahn von P. Die ist offensichtlich $\{P\}$ (weil $xPx^{-1} = P$ für alle $x \in P$).
- Wir behaupten, dass $\{P\}$ die einzige Bahn der Kardinalität 1 ist:
  Sei $\{P'\}$ eine P-Bahn. Dann gilt $xP'x^{-1} = P'$ für alle $x \in P$, das heißt $P \subseteq N(P')$ und Hilfslemma (ii) liefert $P = P'$ (weil P' die einzige Sylow-p-Untergruppe von $N(P')$ ist und P ist eine Sylow-p-Untergruppe von $N(P')$).
- Beachte, dass jede P-Bahnkardinalität eine Potenz von p hat, da diese Kardinalität die Kardinalität $|P|$ teilen muss (siehe Korollar 1, letzte Vorlesung). Also ist $|\sum| \equiv 1 \mod p$.

Dieses beweist die zweite Aussage von Sylow 2 (2).
Nun beweisen wir Sylow 2 (1). Wir zeigen, dass $\sum$ die einzige Bahn ist, sonst gibt es $P \in \Pi$ mit

Fall 2
$P \notin \sum$. Betrachte wieder die Aktion von P auf $\sum$. Analog wie Fall 1 sehen wir, dass es überhaupt keine P-Bahnen der Kardinalität 1 gibt (die einzige Möglichkeit, nämlich $\{P\}$ scheidet nun aus, weil $P \notin \sum$ ist).
Also ist $|\sum| \equiv 0 \mod p$ - Widerspruch.
So $\sum = \Pi$ und damit ist (1) bewiesen.

Es ist $|\Pi| = [G : N(P)]$ für alle $P \in \Pi$ (Korollar 1, letzte Vorlesung). Also ist die Anzahl der Sylow-p-Untergruppen ein Divisor.
Das beweist die erste Aussage in Sylow 2 (2).

Nun beweisen wir Sylow 2 (3)
Sei $H \leq G, |H| = p^k$. Betrachte die Aktion von H auf Π. Die H-Bahnen haben Kardinalität ein Divisor von $|H|$ (Korollar 1, letzte Vorlesung), also haben die H-Bahnenkardinalität eine Potenz von p.
Nun ist aber $|\Pi| \equiv 1 \mod p$, also gibt es eine H-Bahn $\{P\}$ mit nur einem Element, das heißt $H \leq N(P)$ und damit $H \leq P$ (Hilfslemma (i)). $\square$

23. Script zur Vorlesung: Algebra (B III)
Prof. Dr. Salma Kuhlmann, Gabriel Lehéricy, Simon Müller
WS 2016/2017: 3. Februar 2017

Useful English/German Vocabulary

Splitting field - Zefällungskörper
Field extension - Körpererweiterung

Definition 0.1. *Let E/F be a field extension. The* ***Galois group****, denoted $Gal(E/F)$, of E/F is the group of automorphisms of E which fix F pointwise i.e. the automorphisms μ of E such that for all $\alpha \in F$, $\mu(\alpha) = \alpha$.*

Definition 0.2. *Let F be a field and G be a subgroup of the group of automorphisms of F. The set*

$$Inv(G) := \{a \in F \mid \sigma(a) = a \text{ for all } \sigma \in G\}$$

*is a subfield of F. We call it the G-**fixed subfield** of F.*

Let E be a field and G the group of automorphisms of E. Let Γ be the set of subgroups of G and Σ the set of subfields of E. The maps

$$\Gamma \to \Sigma,\ H \mapsto \mathrm{Inv}(H)$$

and

$$\Sigma \to \Gamma,\ F \mapsto \mathrm{Gal}(E/F)$$

have the following properties:

(i) $G_1 \subseteq G_2 \Rightarrow \mathrm{Inv}(G_1) \supseteq \mathrm{Inv}(G_2)$

(ii) $F_1 \subseteq F_2 \Rightarrow \mathrm{Gal}(E/F_1) \supseteq \mathrm{Gal}(E/F_2)$

(iii) $\mathrm{Inv}(\mathrm{Gal}(E/F)) \supseteq F$

(iv) $\mathrm{Gal}(E/\mathrm{Inv}(H)) \supseteq H$

Lemma 0.3. *Let E/F be a splitting field of a separable polynomial with coefficients in F. Then*

$$|Gal(E/F)| = [E : F].$$

Proof. What we will actually show is the following:

Let $\tau : F \to F'$ be an isomorphism of fields. Let $p(x) \in F[x]$ be a separable. Let E be a splitting field for $p(x)$ and E' be a splitting field for $\tau(p)(x)$. There exist exactly $[E : F]$ extensions of τ to an isomorphism $\sigma : E \to E'$.

We proceed by induction on $[E : F]$. If $[E : F] = 1$ the statement is clear.
Fix α a root of $p(x)$ in $E \backslash F$ with minimal polynomial $m_\alpha(x)$. For each β a root of $\tau(m_\alpha)(x)$, let $\tau_\beta : F(\alpha) \to F'(\beta)$ be the (unique) isomorphism extending τ with $\tau_\beta(\alpha) = \beta$.
For each root β of $\tau(m_\alpha)(x)$ let S_β be the set of isomorphisms $E \to E'$ extending τ_β. If $\beta \neq \beta'$ then $S_\beta \cap S_{\beta'} = \emptyset$.

The field E remains the splitting field of $p(x)$ over $F(\alpha)$ and E' remains the splitting field of $\tau_\beta(p)(x)$ over $F'(\beta)$. Since $[E : F(\alpha)] < [E : F]$, by the induction hypothesis,

$$|S_\beta| = [E : F(\alpha)].$$

Since $m_\alpha(x)$ divides $p(x)$, $m_\alpha(x)$ is separable and thus, so is $\tau(m_\alpha)(x)$. Thus $\tau(m_\alpha)(x)$ has $[F(\alpha) : F]$ distinct roots.
Each isomorphism $\sigma : E \to E'$ extending τ maps α to a root of $\tau(m_\alpha)(x)$. Thus each σ restricts to some τ_β. So each σ is in S_β for some β a root of $\tau(m_\alpha)(x)$.
Thus there are exactly $[E : F(\alpha)][F(\alpha) : F]$ isomorphisms $\sigma : E \to E'$ extending $\tau : F \to F'$. So we have proved our claim.
Setting $E = E'$, $F = F'$ and τ equal to the identity homomorphism we get our lemma as stated.

□

Lemma 0.4. *Let G be a finite group of automorphisms of a field E and let $F = Inv(G)$. Then*

$$[E : F] \leq |G|.$$

Remark/Reminder from linear algebra: A system of n homogeneous linear equations over a field E in m variables with $n < m$ has a non-trivial solution. (See LA I, Korollar 2, 7. Vorlesung am 11.11.11)

proof of lemma. Let $n = |G|$ and $G = \{\mu_1 = 1, \mu_2, ..., \mu_n\}$. We need to show that any $m > n$ elements of E are linearly dependent over F. Let $u_1, ..., u_m \in E$. Consider the system of linear equations in variables $x_1, ..., x_m$

$$\sum_{j=1}^{m} \mu_i(u_j)x_j = 0, \ 1 \leq i \leq n. \tag{1}$$

Let $(b_1, ..., b_m)$ be a non-trivial solution with the least number of $b_i \neq 0$. By permuting the variables x_i we may assume $b_1 \neq 0$ and by multiplying through by b_1^{-1} we may assume $b_1 = 1$.

We now show by contradiction that each $b_i \in F := \mathrm{Inv}(G)$. Without loss of generality we may suppose $b_2 \notin F$ and $1 \leq k \leq n$ is such that $\mu_k(b_2) \neq b_2$.
Applying μ_k to 1 we get that

$$\sum_{j=1}^{m} (\mu_k\mu_i)(u_j)\mu_k(b_j) = 0, \ 1 \leq i \leq n.$$

Since $\mu_k\mu_1, ..., \mu_k\mu_n$ is just a permutation of $\mu_1, ..., \mu_n$,

$$(\mu_k(1), \mu_k(b_2), ..., \mu_k(b_m)) = (1, \mu_k(b_2), ..., \mu_k(b_m))$$

is a solution to 1.
Thus

$$(0, b_2 - \mu_k(b_2), ..., b_m - \mu_k(b_m))$$

is a solution to 1 and is non-trivial since $b_2 - \mu_k(b_2) \neq 0$. But this solutions has more zero entries than our original solution. So we have a contradiction. Thus each $b_i \in F$ and from the first equation in 1:

$$\sum_{j=1}^{m} u_j b_j = 0.$$

Thus $u_1, ..., u_m$ are linearly dependent over F.

□

Definition 0.5. *We say an algebraic field extension E/F is* ***separable*** *if the minimal polynomial of every element of E over F is separable.*

Theorem 0.6. *Let E/F be a field extension. The following are equivalent:*

1. *E is a splitting field of a separable polynomial $p(x) \in F[x]$.*
2. *$F = Inv(G)$ for some finite group of automorphisms of E.*
3. *E is a finite dimensional, normal and separable over F.*

Moreover, if E and F are as in (1) and $G = Gal(E/F)$ then $F = Inv(G)$ and if G and F are as in (2), then $G = Gal(E/F)$.

Proof. (1)⇒(2) Let $F' = \text{Inv}(\text{Gal}(E/F))$ and note $F' \supseteq F$. Clearly E is a splitting field of $p(x)$ over F' and since $\text{Gal}(E/F)$ fixes F' pointwise, $\text{Gal}(E/F) = \text{Gal}(E/F')$.

By lemma 0.3, $[E : F] = |\text{Gal}(E/F)|$ and $[E : F'] = |\text{Gal}(E/F')|$. Thus, since $[E : F] = [E : F'][F' : F]$, $[F' : F] = 1$. Thus $F = F'$. So (2) holds.
Note we have also shown that $F := \text{Inv}(G)$ for $G := \text{Gal}(E/F)$, which is the first part of the moreover.

(2) $\Rightarrow$ (3) E is finite dimensional over F by lemma 0.4. Let $\alpha \in E$. Let $\alpha_1 = \alpha, \alpha_2, ..., \alpha_m$ be the orbit of α under the action of G. Let $g(x) = \prod_{i=1}^{m}(x - \alpha_i)$. For any $\sigma \in G$,

$$\sigma(g)(x) = \prod_{i=1}^{m}(x - \sigma(\alpha_i)) = g(x)$$

since σ just permutes the elements of $\{\alpha_1, ..., \alpha_m\}$. Thus $g(x) \in F[x]$.

Since $g(\alpha) = 0$ and $g(x) \in F[x]$, the minimal polynomial of α over F divides g. Since the α_is are all different, g is separable and thus the minimal polynomial of α is separable. So E/F is separable.
Moreover, all roots of the minimal polynomial of α are in E. Thus E is a normal over F (it is the splitting field of the minimal polynomials over F of all elements $\alpha \in E$).

(3) $\Rightarrow$ (1) Since E/F is normal and finite dimensional, E is the splitting field of a finite number of polynomials $p_1, ..., p_n \in F[x]$. We may as well assume that each of these polynomials is monic, irreducible over F and that no two are equal. Thus, each polynomial p_i is the minimal polynomial of some $\alpha \in E$ over F. Thus, since they are non-equal, they also have no common roots. Therefore, there product $p_1 \cdots p_n$ is separable and E is its splitting field.

We now prove the second part of the "moreover". Suppose $F = \mathrm{Inv}(G)$ for some finite group of automorphisms of E. Then by lemma 0.4, $[E : F] \leq |G|$. Since (1) holds, lemma 0.3 says that $\mathrm{Gal}(E/F) = [E : F]$. So, since G is a subgroup of $\mathrm{Gal}(E/F)$, $G = \mathrm{Gal}(E/F)$.

□

Definition 0.7. *We call a field extension E/F which satisfies any (and hence all) the equivalent conditions of the above theorem a* ***Galois extension****.*

Theorem 0.8 (Fundamental theorem of Galois theory)**.** *Let E/F be a Galois extension with $G := Gal(E/F)$. Let Γ be the set of subgroups of $G := Gal(E/F)$ and let Σ be the set of intermediate fields between E and F. The maps*

$$H \mapsto Inv(H)$$

$$K \mapsto Gal(E/K)$$

are inverse bijective maps. Moreover, we have the following properties:

(i) $H_1 \supseteq H_2 \Leftrightarrow Inv(H_1) \subseteq Inv(H_2)$.

(ii) $|H| = [E : Inv(H)]$, $[G : H] = [Inv(H) : F]$

(iii) *H in G is normal if and only if $Inv(H)$ is normal over F. In this case*

$$Gal(Inv(H)/F) \cong G/H$$

24. Script zur Vorlesung: Algebra (B III)

Prof. Dr. Salma Kuhlmann, Gabriel Lehéricy, Simon Müller

WS 2016/2017: 10. Februar 2017

Beweis Fundamentaler Satz der Galois Theorie
Sei E/F eine endliche Galoiserweiterung. Betrachte die Abbildungen

$$\begin{array}{rccl} & \Sigma & \xrightarrow{\gamma} & \Gamma \\ & K & \mapsto & \text{Gal } (E/K) \quad (\leq \text{Gal } (E/F)) \\ \text{und} & \Gamma & \xrightarrow{i} & \Sigma \\ & H & \mapsto & \text{Inv } H \qquad (\subseteq E \text{ und } \supseteq F) \end{array}$$

wobei $\Gamma :=$ die Menge der Untergruppen von $G :=$ Gal (E/F) ist und $\Sigma :=$ die Menge der Zwischenkörper $F \subseteq K \subseteq E$ ist.
Wir behaupten $i \circ \gamma = \text{Id}$ und $\gamma \circ i = \text{Id}$, i.e. Gal $(E/\text{Inv } H) = H$ und Inv (Gal $(E/K)) = K$, das heißt $(\gamma \circ i)(H) = H$ und $(i \circ \gamma)(K) = K$.
Das ist aber die letzte Aussage in Satz 0.6 der letzten Vorlesung (weil H endlich ist), genauer:

- $H \leq G$, also $F :=$ Inv $G \subseteq$ Inv H und $K =$ Inv H ist eine Zwischenerweiterung $F \subseteq K \subseteq E$. Die Anwendung von Satz 0.6 mit H anstatt mit G liefert Gal $(E/\text{Inv } H) = H$. Also $|H| = |\text{Gal } (E/\text{Inv } H)| = [E : \text{Inv } H]$ (siehe Lemma 0.3, letzte Vorlesung)

- Sei nun K ein Unterkörper von E/F (i.e. $F \subseteq K \subseteq E$) und $H :=$ Gal (E/K), dann ist $H \leq G (=$ Gal $(E/F))$.
  Nun ist E immer noch Zerfällungskörper über K von einem separablen Polynom (weil E über F so ist). Also liefert die Anwendung von Satz 0.6 für E und K

$$K = \text{Inv } H = \text{Inv } (\text{Gal } (E/K))$$

- (i) ist eine unmittelbare Folgerung der allgemeinen Eigenschaften: $H_1 \supseteq H_2 \Rightarrow$ Inv $H_1 \subseteq$ Inv H_2. Nun ist Inv $H_1 \subseteq$ Inv H_2, dann ist $H_1 =$ Gal $(E/\text{Inv } H_1) \supseteq$ Gal $(E/\text{Inv } H_2) = H_2$.

- Die erste Aussage in (ii) haben wir schon bewiesen: $|H| = [E : \text{Inv } H]$. Wir berechnen $|G| = [E : F] = [E : \text{Inv } H][\text{Inv } H : F] = |H|[\text{Inv } H : F]$, aber auch $|G| = |H|[G : H]$ (vergleiche: $|G| = |H|[\text{Inv } H : F]$ und $|G| = |H|[G : H]) \Rightarrow [G : H] = [\text{Inv } H : F]$. Dies ist die zweite Aussage in (ii).

Zu (iii):
Sei $H \in \Gamma$ und $K := \text{Inv } H$. Dann ist Inv $(\eta H \eta^{-1}) = \eta(K)$ (für $\eta \in G$), weil für alle ξ gilt: $\xi(k) = k \Rightarrow (\eta\xi\eta^{-1})(\eta(k)) = \eta(k)$.
Es folgt: $H \lhd G \Leftrightarrow \eta(K) = K$ für alle $\eta \in G$ $(*)$
(i.e. K ist (mengenweise) invariant). Nehmen wir nun an, dass $H \lhd G$. Aus $(*)$ folgt, dass $\overline{\eta} := \eta|_K$ ein Automorphismus von K über F ist. Betrachte also nun den Homomorphismus

$$\begin{array}{rccc} \text{Gal } (E/F) = & G & \to & \text{Gal } (K/F) \\ & \eta & \mapsto & \overline{\eta} \end{array}$$

und berechne das Bild $\overline{G}$ und den Kern davon.

Bemerke, dass Inv $\overline{G} = F$ und $\overline{G} = \text{Gal } (K/F)$. Der Kern ist die Menge aller $\eta \in G$ mit $\eta|_K = \text{Id}$. Das heißt, dass der Kern genau Gal $(E/K) = H$ ist. Wir bekommen nun $\overline{G} = \text{Gal } (K/F) \simeq G/H$. Da $F = \text{Inv } \overline{G}, K/F$ ist eine normale Erweiterung (Satz 0.6, 2., letzte Vorlesung).
Umgekehrt: Sei K/F normal. Sei $a \in K$ und $f(x) := Min.Pol._F a$. $f(x)$ zerfällt in Linearfaktoren über $K[x]$.
Dann ist $f(x) = (x - a_1)(x - a_2) \cdots (x - a_n)$ in $K[x]$ mit $a = a_1$.
Sei $\eta \in G$, dann ist $0 = \eta(f(a)) = f(\eta(a))$. Also ist $\eta(a)$ eine Nullstelle und somit existiert ein i mit $\eta(a) = a_i$. Insbesondere ist $\eta(a) \in K$.

Wir haben gezeigt: $\eta(K) \subseteq K$ für alle $\eta \in G$ und damit ist durch $(*)$ $H := \text{Gal } (E/K) \lhd G$. $\square$

25. Script zur Vorlesung: Algebra (B III)

Prof. Dr. Salma Kuhlmann, Gabriel Lehéricy, Simon Müller

WS 2016/2017: 14. Februar 2017

Bemerkung 1
Sei E/F eine endliche (i.e. endlich dimensionale) separable Erweiterung, dann ist E/F endlich erzeugt durch zum Beipsiel $\{a_1, \ldots, a_n\}$, a_i algebraische und separable Elemente.
Sei $f_i(x)$ das Minimalpolynom von a_i, $f_i(x)$ ist separabel irreduzibel. Œ $f_i \neq f_j$ für $i \neq j$.
Setze $f(x) := \prod_{1 \leq i \leq n} f_i(x)$. $f(x)$ ist separabel.
Setze $K :=$ Zerfällungskörper von $f(x)$ über E. Da $K \supseteq F(a_1, \ldots, a_n)$ ist es klar, dass K auch Zerfällungskörper von $f(x)$ über F ist.

(1) So ist K/F normal. Andererseits enthält jede normale Erweiterung von E einen Zerfällungskörper für $f(x)$ über F.

(2) Also damit enthält jede normale Erweiterung von E eine isomorphe Kopie von K.

(3) Also ist K bis Isomorphie eindeutig bestimmt durch E unabhängig von der Wahl der Erzeuger $\{a_1, \ldots, a_n\}$

Definition 1
K/F ist die *normale Hülle* von E/F.

Kapitel 6: Einige Anwendungen der Galois Theorie

Satz 1 Satz vom primitiven Element
Es sei E/F eine endliche separable Körpererweiterung. Dann existiert ein primitives Element zu E/F, das heißt ein Element $z \in E$ mit $E = F(z)$.

Wir brauchen einen
Satz 2 (Hilfssatz) (F-Körper)
Sei F ein Körper. Sei G eine endliche Untergruppe von $F^\times$. Dann ist G zyklisch.

Dafür brauchen wir eine Definition und eine Proposition.

Definition
Sei G eine endliche Gruppe $G \neq \{1\}$. Setze $\gamma(G) :=$ die kleinste $\gamma \in \mathbb{N}$, so dass $x^\gamma = 1$ für alle $x \in G$.
Bemerkung: Lagrange $\Rightarrow \gamma(G) \leq |G|$.

Proposition 1 (Char endlich zyklische Gruppen)
Sei G eine endliche abelsche Gruppe. Es gilt: G ist zyklisch genau dann, wenn $\gamma(G) = |G|$.

Für den Beweis brauchen wir wiederum zwei Hilfslemmas.

Hilfslemma 1
Seien $g, h \in G$, wobei G eine endliche abelsche Gruppe ist. Wir nehmen an: $ggT(|g|, |h|) = 1$.
Es gilt: $|gh| = |g||h|$.

Beweis
Setze $|g| := m$ und $|h| := n$. Sei $r \in \mathbb{N}$, so dass $(gh)^r = 1$.
Dann ist $k := g^r = h^{-r} \in < g > \cap < h >$, somit $|k||m$ und $|k||n$. Also $|k| = 1$ und $k = 1$.
Wir haben gezeigt: $(gh)^r = 1 \Rightarrow g^r = h^r = 1$. Also $m|r$ und $n|r$ und somit $mn = kgV(m, n)|r$.
Andererseits: $(gh)^{mn} = g^{mn}h^{mn} = 1$. □

Hilfslemma 2
Sei G eine endliche abelsche Gruppe und $g \in G$, so dass $|g|$ maximal ist. Es gilt: $|g| = \gamma(G)$.

Beweis

Sei $h \in G$. Wir zeigen: $h^{|g|} = 1$.

Schreibe: $\left.\begin{array}{rcl} |g| & = & p_1^{\ell_1} \cdots p_s^{\ell_s} \\ |h| & = & p_1^{f_1} \cdots p_s^{f_s} \end{array}\right\}$ p_i verschiedene Primzahlen; $\ell_i \geq 0, f_i \geq 0$

Zum Widerspruch sei $h^{|g|} \neq 1$, dann existiert i, so dass $f_i > \ell_i$. Ohne Einschränkung sei $f_1 > \ell_1$.
Setze $g' := g^{p_1^{\ell_1}}$ und $h' := h^{p_2^{f_2} \cdots p_s^{f_s}}$. Wir berechnen: $|g'| = p_2^{\ell_2} \cdots p_s^{\ell_s}$ und $|h'| = p_1^{f_1}$,
ggT $(|g'|, |h'|) = 1 \underset{HL1}{\Rightarrow} |g'h'| = p_1^{f_1} p_2^{\ell_2} \cdots p_s^{\ell_s} > |g|$. - Widerspruch □

Beweis von Proposition 1

"⇒" Sei $G =< g >$, dann ist $|G| = |g|$ und damit ist $\gamma(G) = |G|$.

"⇐" Sei G endlich abelsch mit $\gamma(G) = |G|$.

Hilfslemma 2 ergibt: Es existiert ein $g \in G$ mit $|g| = \gamma(G)$ ($|g|$ maximal). Also ist $|g| = |G|$ und damit ist $G =< g >$. □

Fund. Satz G.T. ↗ Satz 1 ↖ Satz 3 (Steinitz)
Satz 2 ↗
↑
Proposition 1
↑
Hilfslemma 2
↑
Hilfslemma1

Beweis von Satz 2 (Hilfssatz)

G ist abelsch. Wir zeigen $|G| = \gamma(G) := \gamma$ (Proposition 1). Betrachte $f(x) = x^\gamma - 1$. Das Polynom hat $\leq \gamma$ Nullstellen in $F^\times$, also $\leq \gamma$ Nullstellen in G. Andererseits muss jedes $a \in G$ eine Nullstelle sein, also $|G| \leq \gamma$. □

Korollar 1

Sei F ein endlicher Körper und eine E/F endlich dimensionierte Körpererweiterung. Dann hat E/F ein primitives Element.

Beweis

$E^\times$ ist zyklisch, weil E endlich ist. Sei $E^\times =< z >$, dann ist $E = F(z)$. □

Wir brauchen noch einen Satz:

Satz 3 (Steinitz Char. von einfachen Erweiterungen)

Sei E/F endlich dimensioniert, dann ist E/F einfach $\Leftrightarrow$ es nur endliche viele Zwischenkörper $F \subseteq K'' \subseteq E$ gibt.

Beweis

Siehe nächstes Vorlesungsscript

Beweis von Satz 1

Sei E/F wie in der Aussage und sei K die normale Hülle von E/F, dann ist K/F Galois ($F \subseteq E \subseteq K$, wobei K/F Galois). Dann gibt es nur endlich viele Zwischenkörper $F \subseteq K' \subseteq K$ [weil die genau Inv H sind für eine $H \leq \text{Gal}\,(K/F)$ (Fundamentaler Satz der Galois Theorie). Da aber Gal (K/F) endlich ist, gibt es nur endlich viele solcher Untergruppen H.]

A fortiori gibt es nur endlich viele Zwischenkörper $F \subseteq K'' \subseteq E$. Steinitz impliziert nun, dass E/F einfach ist. $\square$

26. Script zur Vorlesung: Algebra (B III)

Prof. Dr. Salma Kuhlmann, Gabriel Lehéricy, Simon Müller

WS 2016/2017: 17. Februar 2017

Beweis (Steinitz)

"⇒" $E = F(u)$. Sei $F \subseteq K \subseteq E$, $f(x)$ Min. Pol. von u über F und $g(x)$ Min. Pol. von u über K.

Es ist $g(x)/f(x)$. Sei K' ein Unterkörper von E/F, erzeugt durch die Koeffizienten von g. $K' \subset K$ und $g(x)$ ist Min. Pol. von u über K'.

Da $E = K(u) = K'(u)$, haben wir $[E : K] = \deg g(x) = [E : K']$. Also $K' = K$. Jeder Zwischenkörper ist erzeugt durch die Koeffizienten der normierten Faktoren von $f(x)$. Da es nur endlich viele davon gibt, haben wir die Behauptung bewiesen.

"⇐" Fall 1:

F ist endlich (siehe Korollar 1, letzte Vorlesung).

Also ohne Einschränkung Fall 2:

F ist unendlich

Wir zeigen, dass $E = F(u, v)$ ein primitives Element hat. Der allgemeine Fall

$E = F(u_1, \ldots, u_k)$ folgt dann per Induktion.

Betrachte die Unterkörper $F(u + av)$ mit $a \in F$. Da es nur endlich viele davon gibt, aber unendlich viele $a \in F$, muss $a \neq b$ existieren, so dass $F(u + av) = F(u + bv)$. Aber dann ist $v = (a - b)^{-1}(u + av - u - bv) \in F(u + av)$ und $u = u + av - av \in F(u + av)$. Setze $z := u + av$, dann ist $E = F(u, v) = F(z)$. □

Kapitel 7: Fundamentaler Satz der Algebra

Satz
$\mathbb{C}$ ist algebraich abgeschlossen.

Beweis
Wir werden die folgenden Eigenschaften von $\mathbb{R}$ benötigen (diese werden allgemeiner für reell abgeschlossene Körper in der Vorlesung "Reelle algebraische Geometrie I" im 7. Semester gezeigt).

(*i*) $a \in \mathbb{R}$ mit $a \geq 0$ hat eine Quadratwurzel in $\mathbb{R}$.

(*ii*) Jedes $f \in \mathbb{R}[x]$ ungeraden Grades hat eine Nullstelle in $\mathbb{R}$.

Behauptung: (i) hat zur Folge, dass jedes Polynom zweiten Grades aus $\mathbb{C}[x]$ eine Nullstelle in $\mathbb{C}$ hat. Dafür genügt es zu zeigen, dass $z \in \mathbb{C}$ eine Quadratwurzel in $\mathbb{C}$ hat. Sei also $z = x + iy \in \mathbb{C}$ mit $x, y \in \mathbb{R}$. Wir wollen lösen:
$z = x + iy = (a + ib)^2 = (a^2 - b^2) + i2ab$ mit $a, b \in \mathbb{R}$. Also $x = a^2 - b^2$ und $y = 2ab$.
Die Gleichungen sind, abgesehen von der Wahl des Vorzeichens von a und b, äquivalent zu

$$a^2 = 1/2x \pm 1/2\sqrt{x^2 + y^2}$$
$$b^2 = 1/2x \pm 1/2\sqrt{x^2 + y^2},$$

wobei $\pm$ bedeutet, dass man für beide Gleichungen einheitlich entweder das $+$ oder das $-$ auswählt.

Betrachte nun $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C} \subseteq L$, wobei $L/\mathbb{C}$ endlich ist. Es ist $[\mathbb{C} : \mathbb{R}] = 2$. Zu zeigen: $L = \mathbb{C}$. Ohne Einschränkung ist $L/\mathbb{R}$ Galois.
Setze $G := \text{Gal}\,(L/\mathbb{R})$. Es ist $[L : \mathbb{R}] = |G| = 2^k m$ mit $k \in \mathbb{N}$ und $2 \nmid m$. G enthält eine 2-Sylow $H \leq G$. Fundamentaler Satz der Galois Theorie $\Rightarrow [L : \text{Inv}\ H] = |H| = 2^k$ beziehungsweise $[\text{Inv}\ H : \mathbb{R}] = m$.
Da aber jedes reelle Polynom ungeraden Grades eine Nullstelle in $\mathbb{R}$ hat, ergibt sich unter Benutzung des Satzes vom primitiven Element notwendig $m = 1$.
Also $[L : \mathbb{R}] = 2^k$ und $[L : \mathbb{C}] = 2^{k-1}$.
Sei $G' := \text{Gal}\,(L/\mathbb{C})$. Wenn $L \neq \mathbb{C}$, also $k \geq 2$, Sylow 1 liefert $H' \leq G'$ mit $|H'| = 2^{k-2}$.
Also ist $[L : \text{Inv}\ H'] = 2^{k-2}$, so $[\text{Inv}\ H' : \mathbb{C}] = 2$. - Widerspruch. $\square$

Kapitel 8: Auflösbare Erweiterungen

Definition
L/K endlich ist *auflösbar*, wenn es einen Oberkörper $E \supset L$ gibt, so dass E/K eine endlische Galois Erweiterung mit auflösbarer Gal (E/K) ist.

Satz (Galois Gruppe als Untergruppen von S_n)
Sei $f \in K[x]$ separabel, $\deg f = n \in \mathbb{N}$ und L/K Zerfällungskörper. Seien $a_1, \ldots, a_n \in L$ Nullstellen von f, so definiert

$$\begin{array}{rccc} \varphi: & \text{Gal } (L/K) & \longrightarrow & Sym\{a_1, \ldots, a_n\} \\ & \delta & \longmapsto & \delta|\{a_1, \ldots, a_n\} \end{array}$$

einen injektiven Gruppenhomomorphismus.

Beweis
$\delta \in \text{Gal } (L/K), f(a_i) = 0 \Rightarrow 0 = \delta(f(a_i)) = f(\delta(a_i))$, da δ die Koeffizienten von f fest lässt. Also ist $\delta(a_i)$ eine Nullstelle von f.
Da nun δ injektiv ist, ist auch $\delta : \{a_1, \ldots, a_n\} \to \{a_1, \ldots, a_n\}$ surjektiv, also bijektiv. Damit ist φ wohldefiniert.
Da $L = K(a_1, \ldots, a_n)$ und $\delta \in \text{Gal } (L/K)$ bereits eindeutig durch seine Werte auf $\{a_1, \ldots, a_n\}$ bestimmt ist, ist φ injektiv. □

Korollar 1
Sei L/K eine endliche Galois-Erweiterung vom Grad n, so lässt sich Gal (L/K) als Untergruppe von S_n auffassen.

Korollar 2
Sei L/K eine separable Erweiterung vom Grad ≤ 4, dann ist L/K auflösbar.

Beweis
Satz vom primitiven Element $\Rightarrow L = K(a)$. Sei $f \in K[x]$ das $Min.Pol._K a$. Sei L' ein Zerfällungskörper von f über K. Gal (L'/K) lässt sich als Untergruppe von S_4 auffassen. Da S_4 und alle ihre Untergruppen auflösbar sind, so sind L'/K und L/K auflösbar. □

Korollar 3
Es gibt endlich separable Körpererweiterungen, die nicht auflösbar sind.

Beweis
Sei k ein Körper und $L = k(T_1, \ldots, T_n) = \text{Quot } (k[T_1, \ldots, T_n])$ Körper der rationalen Funktion in endlich vielen Variablen $T_1, \ldots, T_n$.
Jede $\pi \in S_n$ definiert einen Automorphismus von L, in dem man π auf die Variablen $T_1, \ldots, T_n$ anwendet:

$$\begin{array}{ccc} k(T_1, \ldots, T_n) & \longrightarrow & k(T_1, \ldots, T_n) \\ \frac{g(T_1, \ldots, T_n)}{h(T_1, \ldots, T_n)} & \longmapsto & \frac{g(T_{\pi(1)}, \ldots, T_{\pi(n)})}{h(T_{\pi(1)}, \ldots, T_{\pi(n)})} \end{array}$$

Sei $K := \text{Inv } S_n \subseteq L$. Es ist (Satz 0.6, 23. Vorlesung) L/K Galois und $\text{Gal } (L/K) = S_n$. Wähle nun $n \geq 5$, dann ist $\text{Gal } (L/K)$ nicht auflösbar. $\square$