

19 Script zur Vorlesung: Lineare Algebra II(SoSe2020)

Prof. Dr. Salma Kuhlmann

In diesem Skript beweisen wir Satz 19.2 und untersuchen seine Folgerungen. Damit beenden wir Kapitel III.

Erinnerung:

Sei V ein K -Vektorraum und seien $W \subseteq V, W' \subseteq V$ Unterräume. W' ist Komplement von W in V , wenn $V = W \oplus W'$.

Bemerkung 19.1.

1. Komplemente existieren und sind im Allgemeinen nicht eindeutig.
2. Sei $W \subseteq V$ ein Unterraum und $v_1^1, \dots, v_s^1 \in V$ linear unabhängig, so dass $\text{span}\{v_1^1, \dots, v_s^1\} \cap W = \{0\}$ sind. Dann kann man $\{v_1^1, \dots, v_s^1\}$ zu einer Basis von einem Komplement von W in V ergänzen.

Beweis: ÜA.

Satz 19.2. (Jordan Normalform).

Sei V ein endlichdimensionaler K -Vektorraum, und $T \in \mathcal{L}(V, V)$. Sei Min. Pol. $(T) = (x - c)^r$ mit $c \in K$. Dann hat V eine Basis aus Jordanketten zum Eigenwert c (eine Jordanbasis). Die längsten Ketten haben die Länge r , die Anzahl der Ketten in jeder Länge ist eindeutig bestimmt.

Beweis: Beachte, dass

$$\ker(T - cI) \subseteq \dots \subseteq \ker(T - cI)^r = V.$$

Behauptung:

Seien $j \geq 2$ und $v^1, \dots, v^s \in \ker(T - cI)^j$ linear unabhängig und $\text{span}\{v^1, \dots, v^s\} \cap \ker(T - cI)^{j-1} = \{0\}$.

Dann gelten:

1. $w^1 := (T - cI)v^1, \dots, w^s := (T - cI)v^s \in \ker(T - cI)^{j-1}$ sind linear unabhängig und
2. $\text{span}\{w^1, \dots, w^s\} \cap \ker(T - cI)^{j-2} = \{0\}$.

Beweis der Behauptung:

1. $0 = (T - cI)^j v^i = (T - cI)^{j-1} \underbrace{(T - cI)v^i}_{w^i}$. Also $w^i \in \ker(T - cI)^{j-1}$.

Sei nun $\sum_{i=1}^s c_i w^i = 0$ mit $c_i \neq 0$ für ein i , so $\sum_{i=1}^s c_i (T - cI)v^i = 0$.

Also $(T - cI) \sum_{i=1}^s c_i v^i = 0$. Also $\sum_{i=1}^s c_i v^i \in \ker(T - cI)^{j-1}$, weil $(T - cI)^{j-1} (\sum c_i v^i) = (T - cI)^{j-2} \underbrace{(T - cI) (\sum c_i v^i)}_0 = 0$.

Also ist $\sum_{i=1}^s c_i v^i \in \text{span}\{v^1, \dots, v^s\} \cap \ker(T - cI)^{j-1}$.

Also ist $\sum_{i=1}^s c_i v^i = 0$ mit $c_i \neq 0$ für ein i . Widerspruch, da $\{v^1, \dots, v^s\}$ linear unabhängig sind.

Korollar 19.4.

Sei V ein endlichdimensionaler K -Vektorraum, $T \in \mathcal{L}(V, V)$. Falls Min. Pol. (T) (oder Char. Pol. (T)) zerfällt über K , dann hat V eine Basis von Jordanketten zu den verschiedenen Eigenwerten. Die Anzahl der Jordanketten in jeder Länge ist eindeutig bestimmt.

Beweis:

Sei Min. Pol. $(T) = (x - c_1)^{r_1} \cdots (x - c_k)^{r_k}$.

Satz 18.2 liefert eine Zerlegung:

$V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_k$ mit W_i T -invariant und Min. Pol. $T_{W_i} = (x - c_i)^{r_i}$.

Jordan Normalform liefert Basen \mathcal{B}_{c_i} von Jordanketten für T_{W_i} und jeden c_i .

Setze $\mathcal{B} = \bigcup_{i=1}^k \mathcal{B}_{c_i}$ (als geordnete Basis). □

Bemerkung 19.5.

Sei $V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_k$, W_i T -invariant und $\mathcal{B}_i =$ Basis für W_i , $\mathcal{B} = \bigcup_{i=1}^k \mathcal{B}_i$ (als geordnete Basis). Es gilt

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 0 & \\ & & & A_k \end{pmatrix}$$

wobei $A_i = [T_{W_i}]_{\mathcal{B}_i}$.

Beweis: s. ÜB.

In B3 werden wir algebraische abgeschlossene Körper kennenlernen. Wenn K algebraisch abgeschlossen ist (z.B. $K = \mathbb{C}$) dann zerfällt jedes Polynom (vom Grad ≥ 1) über K .

Korollar 19.6.

Sei K algebraisch abgeschlossen, V ein endlichdimensionaler K -Vektorraum, und $T \in \mathcal{L}(V, V)$. Es gibt eine Basis \mathcal{B} von V , so dass

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} A_{c_1} & & & \\ & \ddots & & \\ & & 0 & \\ & & & A_{c_k} \end{pmatrix}$$

wobei c_1, \dots, c_k die Eigenwerte von T sind und A_{c_i} wie in Bemerkung 19.3 beschrieben.