4 Script zur Vorlesung: Lineare Algebra II (SoSe 2020)

Prof. Dr. Salma Kuhlmann

In diesem Skript werden wir Nullstellen von Polnomen und deren Vielfachheit studieren. Insbesondere werden wir in Abschnitt 4 Taylor's Formel lernen und beweisen. TF wird dann eingesetzt, um die Vielfachheit zu bestimmen. Diese Begriffe werden wir u.a. in Skripte 12 und 13 (Kapitel III; Normalformen) benötigen.

Korollar 4.1.
Seien $f \in K[x]; c \in K$. Es gilt: $(x-c)$ teilt f genau dann, wenn $f(c) = 0$.

Beweis: Divisionsalgorithmus liefert q, r so dass $f = (x-c)q + r; r = 0$ oder deg $r < 1$. Also ist r ein Skalarpolynom, und $f(c) = r(c) = r$. Insbesondere ist $r = 0$ genau dann, wenn $f(c) = 0$. □

Definition 4.2.
Seien $f \in K[x]; c \in K$, dann ist c eine *Nullstelle* von f , wenn $f(c) = 0$. Abbreviation: "NS von f in K". Das heisst, c ist Nullstelle von f genau dann, wenn $(x-c)$ teilt f.

Korollar 4.3.
Sei $f \in K[x]$ mit deg $f = n$. Dann hat f höchstens n Nullstellen in K.

Beweis: Wir beweisen per Induction nach n.

- Induktionsanfang: wir prüfen gleich für $n = 0$ (und $n = 1$.) Wenn $n = 0$ dann ist $f = c$ ein Skalarpolynom, und $c \neq 0$. Dann hat f gar keine Nullstelle in K. Wenn $n = 1$, dann $\exists a, c \in K, a \neq 0, s.d. f = ax + c$. Klar gilt $ax + c = 0$ genau dann, wenn $x = \frac{-c}{a}$, und damit ist $\frac{-c}{a}$ die eindeutige Nullstelle.
- Induktionsannahme: Wir nehmen nun an, dass die Aussage für $n-1$ gilt.
- Induktionschritt: Sei a eine Nullstelle von f in K. Dann gibt es $q \in K[x]$ so dass $f = (x-a)q; \qquad \deg q = n-1$.

Sei $b \in K$. Nun ist $f(b) = 0$ genau dann, wenn $b = a$ oder b ist Nullstelle von q in K.
Induktionsannahme $\Rightarrow q$ hat höchstens $(n-1)$ Nullstellen, also hat damit f höhstens n Nullstellen. □

§ 4 Formale Ableitungen

Notation 4.0:

Sei $f = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_n x^n$. Setze:
$f^{(0)} = f := D^0 f$ (Konvention) und
$f^{(1)} := f' = c_1 + 2c_2 x + \cdots + nc_n x^{n-1} := D^1 f = Df$
$f^{(2)} = f'' = D^2 f := D(D(f))$
$f^{(3)} = D^3(f)$,
usw.

Bemerkung 4.4.
Für $f, g \in K[x]$ und $c \in K$ gilt: $D(f + cg) = D(f) + cD(g)$. So ist $D : K[x] \longrightarrow K[x]$ ein linearer Operator. (Siehe auch ÜB 10; LA I). Allgemeiner gilt für $n \in \mathbb{N}_0$: D^n ist ein linearer Operator.

Satz 4.5. (Taylor's Formel)
Seien Char $(K) = 0; n \in \mathbb{N}_0, a \in K, p \in K[x]$ und deg $p \leq n$.
Es gilt: $p = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} p^{(i)}(a) \frac{1}{i!} (x - a)^i$ $(*)$

Beweis:
(Die Beweisidee ist wie für LIF). Sei V der K-Vektorraum der Polynome von deg $\leq n$ (und das 0 Polynom).
Für alle $i = 0, \ldots, n$, definiere $l_i : V \longrightarrow K$; $l_i \in V^*$, durch: $l_i(p) := p^{(i)}(a)$.
Setze $p_i := \frac{1}{i!}(x - a)^i$. Es gilt $l_j(p_i) = \delta_{ij}$ (siehe Übungsblatt).
Also sind $p_0, \ldots, p_n$ und $l_0, \ldots, l_n$ zueinander Dual-Basen von V und V^*.
Also $p = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} l_i(p) p_i$. □

Bemerkung 4.6.
(1) $1, (x - a), \ldots, (x - a)^n$ sind linear unabhängig. Also ist diese lineare Kombination $(*)$ eindeutig.

(2) Char $(K) = 0$ wird vorausgesetzt damit $i! \neq 0$.

Definition 4.7.
Sei $f \neq 0$ und $c \in K$ eine Nullstelle von f in K. Die *Vielfachheit* von c ist die größte $\mu \in \mathbb{N}$, so dass gilt: $(x - c)^\mu$ teilt f,
Bemerke: $1 \leq \mu \leq$ deg f.

Satz 4.8.
Seien Char $(K) = 0, f \neq 0,$ deg $f \leq n$ und $c \in K$ ist eine Nullstelle von f.
Es gilt: c hat die Vielfachheit μ genau dann, wenn
$f^{(k)}(c) = 0$ bei $0 \leq k \leq \mu - 1$ und $f^{(\mu)}(c) \neq 0$ (†)

Beweis:

"$\Rightarrow$" $(x-c)^\mu$ teilt f und $(x-c)^{\mu+1}$ teilt f nicht. Es gibt also $g \neq 0$ mit $f = (x-c)^\mu g$.
Bemerke: $\deg g \leq n-\mu$ und $g(c) \neq 0$.

Die Taylor Formel liefert:
$f = (x-c)^\mu \big[\sum_{m=0}^{n-\mu} g^{(m)}(c) \frac{(x-c)^m}{m!} \big]$. Also $f = \sum_{m=0}^{n-\mu} g^{(m)}(c) \frac{(x-c)^{\mu+m}}{m!}$.

Da die Koeffizienten von f als lineare Kombination von $(x-c)^k (0 \leq k \leq n)$ eindeutig sind, ergibt ein Vergleich:

$$f = \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(c) \frac{(x-c)^k}{k!} = \sum_{m=0}^{n-\mu} g^{(m)}(c) \frac{(x-c)^{\mu+m}}{m!} =$$

$$g^{(0)}(c) \frac{(x-c)^\mu}{0!} + \cdots + g^{(n-\mu)}(c) \frac{(x-c)^n}{(n-\mu)!}. \qquad (\dagger\dagger)$$

Also $\frac{f^{(k)}}{k!}(c) = 0$ für $0 \leq k \leq \mu - 1$ und $\frac{f^{(k)}}{k!}(c) = \frac{g^{(k-\mu)}(c)}{(k-\mu)!}$ für $\mu \leq k \leq n$.

Insbesondere für $\mu = k$ erhalten wir $f^{(\mu)}(c) = g(c) \neq 0$.

"$\Leftarrow$" $(*)$ und $(\dagger\dagger)$ liefern $f = \sum_{k=\mu}^{n} f^{(k)}(c) \frac{(x-c)^k}{k!}$.

$$\text{Also } f = (x-c)^\mu \underbrace{\Big[\frac{f^\mu(c)}{\mu!} + \frac{f^{\mu+1}(c)}{\mu+1!}(x-c) + \cdots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^{n-\mu} \Big]}_{:= g}$$

$$g(c) = \frac{f^\mu(c)}{\mu!} \neq 0.$$

Also $f = (x-c)^\mu g$ mit $g(c) \neq 0$.
Wir behaupten nun: $(x-c)^{\mu+1}$ teilt f nicht, sonst hätten wir $h \in K[x]$
mit $f = (x-c)^{\mu+1} h = (x-c)^\mu (x-c) h = (x-c)^\mu g$.
$K[x]$ Integritätsbereich $\Rightarrow g = (x-c)h$. Also $g(c) = 0$. Ein Widerspruch. $\square$