25 Script zur Vorlesung: Lineare Algebra II(SoSe2020)

Prof. Dr. Salma Kuhlmann

In diesem Script werden wir eine weitere wichtige Ergänzung zum Spektralsatz bringen, und somit Abschnitt 23 und Kapitel IV, und auch diese Vorlesung beenden.

Sei weiterhin V ein endlich dimensionaler K - Vektorraum und $(\ |\ )$ ein inneres Produkt. Wir benutzen hier die Notationen von Satz 23.9.

Wir wollen nun die Aussage vom Spektralsatz im Fall $K = \mathbb{R}$ genauer untersuchen. In diesem Fall sind die p_i entweder linear $p_i = (x - r_i), r_i \in \mathbb{R}$ oder quadratisch irreduzibel, d.h. von der Form $(x-a)^2 + b^2; a, b \in \mathbb{R}, b \neq 0$. Wir wollen eine feinere Zerlegung von V bekommen, in dem wir die W_i weiter zelegen wenn p_i quadratisch irreduzibel ist.

Beispiel 25.1.
Sei $r > 0$; $\theta \in \mathbb{R}$; $\theta \notin \pi\mathbb{Z}$ (i.e. θ erfüllt $\sin\theta \neq 0$).
Sei $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ mit Matrix Darstellung A bzgl. standard orthonormale Basis $\{e_1, e_2\}$:
$A := r\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$
A ist normal: $AA^t = A^tA$.

Sei $p =$ Char. Pol. $(T) = \det(xI - A) = (x - r\cos\theta)^2 + r^2\sin^2\theta$.
Setze $a := r\cos\theta$, $b := r\sin\theta$, $b \neq 0$.
Also ist $p = (x-a)^2 + b^2$ irreduzibel in $\mathbb{R}[x]$.
Also ist Min. Pol. $T = p$.

Wir zeigen nun die Umkehrung:

Satz 25.2.
Sei $\dim V = n, T \in \mathcal{L}(V, V)$ normal mit Min. Pol. $T := p = (x-a)^2 + b^2, a, b \in \mathbb{R}, b \neq 0$.
Es gilt: Es existieren 2-dimensionale T-invariante Unterräume $V_1, \dots, V_s$, so dass

(i) V_i orthogonal zu V_j ist für $i \neq j$.

(ii) $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_s$.

(iii) V_j hat eine orthonormale Basis $\{\alpha_j, \beta_j\}$, so dass $T\alpha_j = a\alpha_j + b\beta_j$ und $T\beta_j = -b\alpha_j + a\beta_j$.
Das heißt $[T_{V_j}]_{\{\alpha_j,\beta_j\}} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, wobei $\{\alpha_j, \beta_j\}$ die geordnete orthonormale Basis ist.

(iv) Char. Pol. $(T) = p^s$.

(v) $[T^*_{V_j}]_{\{\alpha_j,\beta_j\}} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$

(vi) $TT^* = (a^2 + b^2)I$.

Setze $r := \sqrt{a^2+b^2}$, wähle θ mit $a = r\cos\theta$ und $b = r\sin\theta$. Dann ist V also die orthogonale direkte Summe von 2 dimensionalen Unterräumen und die Beschränkung T_{V_i} ist "r-mal eine Drehung um die Winkel θ".

Wir brauchen eine Bemerkung und ein Hilfslemma, bevor wir den Satz beweisen.

Bemerkung 25.3.

(*i*) Sei $K = \mathbb{R}, U \in \mathcal{L}(V,V)$. Es gilt $(U\alpha \mid \beta) = (U^*\beta \mid \alpha)$ für $\alpha,\beta \in V$.

(*ii*) Sei nun U normal, dann gilt $\|U\alpha\| = \|U^*\alpha\|$ für alle $\alpha \in V$.

Beweis:

(*i*) $(U^*\beta \mid \alpha) = (\beta \mid U\alpha) = (\overline{U\alpha \mid \beta}) = (U\alpha \mid \beta)$.

(*ii*) $\|U\alpha\|^2 = (U\alpha \mid U\alpha) = (\alpha \mid U^*U\alpha) =$
$(\alpha \mid UU^*\alpha) = (U^*\alpha \mid U^*\alpha) = \|U^*\alpha\|^2$. □

Hilfslemma 25.4.
Sei $K = \mathbb{R}$ und S normal, so dass $S^2 + I = 0$.
Sei $\alpha \in V$ und setze $\beta := S\alpha$. Es ist $S^*\alpha = -\beta$ und $S^*\beta = \alpha$ (†)
und $(\alpha \mid \beta) = 0$ und $\|\alpha\| = \|\beta\|$.

Beweis:
$S\alpha = \beta$ und $S\beta = S^2\alpha = -\alpha$. Also
$0 = \|S\alpha - \beta\|^2 + \|S\beta + \alpha\|^2 = \|S\alpha\|^2 - 2(S\alpha \mid \beta) + \|\beta\|^2 + \|S\beta\|^2 + 2(S\beta \mid \alpha) + \|\alpha\|^2$.
Da S normal ist, folgt (Bemerkung 25.3):
$0 = \|S^*\alpha\|^2 - 2(S^*\beta \mid \alpha) + \|\beta\|^2 + \|S^*\beta\|^2 + 2(S^*\alpha \mid \beta) + \|\alpha\|^2 = \|S^*\alpha + \beta\|^2 + \|S^*\beta - \alpha\|^2$. Daraus folgt (†). Berechne nun $(\alpha \mid \beta) = (S^*\beta \mid \beta) = (\beta \mid S\beta) = (\beta \mid -\alpha) = -(\alpha \mid \beta)$. Also $(\alpha \mid \beta) = 0$.
Schließlich $\|\alpha\|^2 = (S^*\beta \mid \alpha) = (\beta \mid S\alpha) = (\beta \mid \beta) = \|\beta\|^2$. □

Beweis vom Satz 25.2
• Sei $\{V_1,\dots,V_l\}$ eine maximale Menge von 2 dimensionalen Unterräumen mit den Eigenschaften (i), (iii) und (v), das heißt $T^*\alpha_j = a\alpha_j - b\beta_j$ und $T^*\beta_j = b\alpha_j + a\beta_j$ für $1 \le j \le l$.

Setze $W := V_1 \oplus \cdots \oplus V_l$.

Wir behaupten dass $W = V$ (und $l = s = \frac{n}{2}$).

Sonst ist $W^\perp \neq \{0\}$ und (iii) + (v) implizieren außerdem, dass W, T und T^* invariant ist. Also ist $W^\perp$ T^* und $T^{**} = T$ invariant.
Setze $S := b^{-1}(T - aI)$. Bemerke, dass $S^* = b^{-1}(T^* - aI)$, so $S^*S = SS^*$ (S normal) und $W^\perp$ ist auch S und S^* invariant und $(T-aI)^2 + b^2I = 0$ impliziert $S^2 + I = 0$.
Also können wir Hilfslemma 25.4 für S und $W^\perp$ anwenden.
Wir bekommen

$$\begin{array}{ll} \alpha \in W^\perp, & \|\alpha\| = 1 \\ \beta := S\alpha, & \beta \in W^\perp \text{ und} \\ S\beta = -\alpha. & \end{array}$$

Da $T = aI + bS$ haben wir außerdem

$$\left.\begin{array}{rcr} T\alpha &=& a\alpha + b\beta \\ T\beta &=& -b\alpha + a\beta \end{array}\right\} (iii)$$

Darüber hinaus

$$\begin{array}{rcl} S^*\alpha & = & -\beta \\ S^*\beta & = & \alpha \\ (\alpha \mid \beta) & = & 0 \text{ und} \\ \|\beta\| & = & 1. \end{array}$$

Nun ist $T^* = aI + bS^*$. Also

$$\left.\begin{array}{rcl} T^*\alpha & = & a\alpha - b\beta \\ T^*\beta & = & b\alpha + a\beta \end{array}\right\}(v)$$

Widerspruch zur maximalen Wahl von $\{V_1, \ldots, V_l\}$, also $W = V$.

• Wir beweisen nun (iv), wir berechnen: $\det\begin{pmatrix} x-a & b \\ -b & x-a \end{pmatrix} = (x-a)^2 + b^2$.

Es folgt aus (i), (ii) und (iii) nun, dass $\det(xI - T) = [(x-a)^2 + b^2]^s$. □

• Wir müssen noch (vi) zeigen, zu zeigen also dass T ist invertierbar und $T^* = (a^2+b^2)T^{-1}$. Aus (iii) und (v) haben wir

$$[T_{V_j}]_{\{\alpha_j,\beta_j\}} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \text{ und}$$

$$[T^*_{V_j}]_{\{\alpha_j,\beta_j\}} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

Nun ist aber:

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+b^2 & 0 \\ 0 & a^2+b^2 \end{pmatrix} =$$

$[T^*_{V_j}]_{\{\alpha_j,\beta_j\}}[T_{V_j}]_{\{\alpha_j,\beta_j\}} = [T^*T_{V_j}]_{\{\alpha_j,\beta_j\}} = (a^2+b^2)I_2$.

Also $T^*T = (a^2+b^2)I$. □