20 Script zur Vorlesung: Lineare Algebra II(SoSe2020)

Prof. Dr. Salma Kuhlmann

KAPITEL IV: EUKLIDISCHE UND UNITÄRE RÄUME.

In diesem Kapitel werden wir einen K- Vektorraum V (wobei $K = \mathbb{R}$, oder $\mathbb{C}$) betrachten. Wir werden zunächst in Abschnitt 15; Skripte 20 und 21 eine weitere Struktur (inneres Produkt und Norm) auf V definieren und seine Eigenschaften analysieren. Wir werden dabei besondere (orthonormale) Basen für V studieren. Nachdem wir in Abschnitt 16 die Beziehung zum Dualraum V^* (Riesz-Darstellung) und zum Bidualraum V^{**} analysieren, werden wir die transponierte Konjugierte T^* von $T \in \mathcal{L}(V,V)$ einführen. In den Abschnitte 17 bis 20 werden wir dann im Bezug auf T^* besondere Operatoren $T \in \mathcal{L}(V,V)$ und deren Matrixdarstellungen betrachten. Insbesondere werden wir e.g. Hermite'sche Operatoren sowie Isometrien studieren. In den letzten 3 Abschnitte 21 bis 23 werden wir unser Studium auf normale Operatoren erweitern, und deren Spektraltheorie und Anwendungen einbringen.

§ 15 Innere Produkte

Sei stets $K = \mathbb{R}$, oder $K = \mathbb{C}$, und sei V ein endlich dimensionaler K-Vektorraum.

Definition 20.0
Ein *inneres Produkt* (auch *Skalarprodukt*) auf V ist eine Abbildung

$$V \times V \longrightarrow K$$

$$(x,y) \longmapsto (x \mid y),$$

so dass

(1) $(x \mid y) = \overline{(y \mid x)}$

(2) $(c_1x_1 + c_2x_2 \mid y) = c_1(x_1 \mid y) + c_2(x_2 \mid y)$

(3) $(x \mid x) \geq 0$ und $(x \mid x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Bemerkung 20.1.

(1') Da $(x \mid x) = \overline{(x \mid x)}$, ist $(x \mid x) \in \mathbb{R}$.

(2') Wir folgern: $(x \mid c_1y_1 + c_2y_2) = \overline{(c_1y_1 + c_2y_2 \mid x)} = \overline{c_1(y_1 \mid x) + c_2(y_2 \mid x)} = \overline{c_1}\,\overline{(y_1 \mid x)} + \overline{c_2}\,\overline{(y_2 \mid x)} = \overline{c_1}(x \mid y_1) + \overline{c_2}(x \mid y_2)$

Notation und Definition:
Wir setzen $(x \mid x) := \|x\|^2$ und nennen $\|x\| := \sqrt{(x \mid x)}$ die *Norm von x*.

Bemerkung 20.2. Es gilt: $\|cx\| = |c|\ \|x\|$.

Terminologie:

• Wenn $K = \mathbb{R}$, heißt V *euklidescher Raum* und das innere Produkt $(\ \mid\ )$ heißt symmetrisch [wegen (1]) bilineare [wegen (2)] positiv definite [wegen (3)] Form.

• Wenn $K = \mathbb{C}$, heißt V *hermitescher oder unitärer Raum* und das innere Produkt $(\ \mid\ )$ ist hermitesch symmetrisch [wegen (1)] konjugiert bilinear [wegen (2) und (2')] positive definite [wegen (3)] Form.

Beispiel 20.3. Auf $V = K^n$ ist das standard innere Produkt so definiert:
$(x \mid y) = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \overline{\eta_i}$, für $x = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ und $y = (\eta_1, \dots, \eta_n) \in V$.

Definition 20.4.

(*i*) x, y sind *orthogonal*, falls $(x \mid y) = 0$ (äquivalent $(y \mid x) = 0$).

(*ii*) $W_1, W_2 \subseteq V$ sind *orthogonal*, falls $(x \mid y) = 0$ für alle $x \in W_1$ und für alle $y \in W_2$

(*iii*) $S \subseteq V$ ist *orthonormal*, falls $(x \mid y) = 0$, wenn $x \neq y$ und $(x \mid y) = 1$, wenn $x = y$. Also $S = \{x_1, \dots, x_n\}$ ist orthonormal, falls $(x_i \mid x_j) = \delta_{ij}$

(*iv*) S ist *vollständig orthonormal*, falls S orthonormal und maximal (bezüglich Inklusion) für die Eigenschaft "orthonormal" ist.

Bemerkung 20.5.

(*i*) S ist orthonormal $\Rightarrow S$ ist linear unabhängig.

Beweis: $\sum c_i x_i = 0 \Rightarrow 0 = (\sum c_i x_i \mid x_j) = \sum c_i (x_i \mid x_j) = c_j$, für alle j.

(*ii*) $\dim V = n \Rightarrow |S| \leq n$ für S orthonormal.

Definition 20.6.
orthogonal $\dim(V) = max\{|S| \mid S \text{ orthonormal}\}$

Bemerkung 20.7.
orthogonal $\dim(V) \leq \dim(V)$

Notation: Für $S \subseteq V$, setze
$S^\perp := \{x \in V \mid (x \,|\, s) = 0 \text{ für alle } s \in S\}$

Bemerkung 20.8.

(*i*) $S^\perp$ ist ein Unterraum.

(*ii*) $S \subseteq (S^\perp)^\perp := S^{\perp\perp}$

(*iii*) $span(S) \subseteq S^{\perp\perp}$

Beweis: Wir beweisen (i): $0 = (0 \mid y) \Rightarrow \{0\} \subseteq S^\perp$.
Für $x_1, x_2 \in S^\perp; c \in K : (x_1 + cx_2 \mid s) = (x_1 \mid s) + c(x_2 \mid s) = 0 + 0 = 0$.
(ii) und (iii): ÜA.

Definition 20.9.
$W \subseteq V$ ist ein Unterraum. $W^\perp$ ist das *orthogonale Komplement*.

Satz 20.10. (Bessel's Ungleichung)
Sei $S = \{x_1, \ldots, x_n\}$ orthonormal, $x \in V$. Setze $c_i := (x \mid x_i)$. Es gelten

(*i*) $\sum_i |c_i|^2 \leq \|x\|^2$

(*ii*) $x' := x - \sum c_i x_i$ ist orthogonal zu x_j für alle $(j = 1, \ldots, n)$

Beweis:
Wir berechnen: $0 \leq (x' \mid x') = (x - \sum c_i x_i \mid x - \sum c_i x_i) =$
$(x \mid x) - \sum_i c_i (x_i \mid x) - \sum_i \overline{c_i}(x \mid x_i) + \sum_{i,j} c_i \overline{c_j}(x_i \mid x_j) =$
$\|x\|^2 - \sum_i c_i \overline{c_i} - \sum_i \overline{c_i} c_i + \sum_i c_i \overline{c_i} = \|x\|^2 - \sum_i |c_i|^2$.
Damit ist (i) bewiesen.
$(x' \mid x_j) = (x \mid x_j) - \sum_i c_i (x_i \mid x_j) = c_j - c_j = 0$. Damit ist (ii) bewiesen. □

Satz 20.11. (Charakterisierung von Vollständigkeit)
Sei $S = \{x_1, \ldots, x_n\}$ orthonormal. Folgende sind äquivalent:

(*i*) S ist vollständig.

(*ii*) Aus $(x \mid x_i) = 0$ für alle $i = 1, \ldots, n$ folgt $x = 0$.

(*iii*) $spanS = V$.

(*iv*) $x = \sum_i (x \mid x_i) x_i$ für alle $x \in V$.

(*v*) $(x \mid y) = \sum_i (x \mid x_i)(x_i \mid y)$ für alle $x, y \in V$.

(*vi*) $\|x\|^2 = \sum_i \mid (x \mid x_i) \mid^2$ für alle $x \in V$.

Beweis:
$(i) \Rightarrow (ii)$
Beweis via Widerspruch. Sei $x \neq 0$. Setze $x_{n+1} := \frac{x}{\|x\|}$. Dann ist $\{x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}\}$ orthonormal.
$\left[(x_{n+1} \mid x_i) = 0 \text{ und } (x_{n+1} \mid x_{n+1}) = \frac{1}{\|x\|^2}(x \mid x) = 1\right]$.

$(ii) \Rightarrow (iii)$
Sei $x \in V, x \notin spanS$, dann ist $x' = x - \sum (x \mid x_i) x_i \neq 0$ und (Satz 20.10) ist zu jedem x_i orthogonal. Widerspruch.

$(iii) \Rightarrow (iv)$
sei $x \in V; x = \sum c_i x_i$, also $(x \mid x_j) = \sum c_i (x_i \mid x_j) = c_j$.

$(iv) \Rightarrow (v)$
$$\left(\sum_i (x \mid x_i) x_i \;\middle|\; \sum_j (y \mid x_j) x_j\right) = \sum_{i,j} (x \mid x_i)\overline{(y \mid x_j)}(x_i \mid x_j) = \sum_i (x \mid x_i)(x_i \mid y).$$

$(v) \Rightarrow (vi)$
$(x \mid x) = \sum_i (x \mid x_i)(x_i \mid x) = \sum_i (x \mid x_i)\overline{(x \mid x_i)} = \sum_i \ |(x \mid x_i)\ |^2.$

$(vi) \Rightarrow (i)$
sei $x \notin S$. Wenn $S \cup \{x\}$ orthonormal ist, dann ist
$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} |\ (x \mid x_i)\ |^2 = 0 = (x \mid x) \neq 1$. Widerspruch. □