15 Script zur Vorlesung: Lineare Algebra II(SoSe2020)

Prof. Dr. Salma Kuhlmann

In diesem Skript werden wir zunächst den Satz von Cayley Hamilton aussagen und beweisen, der Satz ist u.a. für die Berechnung von MinPol sehr hilfreich. Wir beenden Abschnitt 10 indem wir die folgende wichtige Frage beantworten: Sei $A \in Mat_{n\times n}(\mathbb{Q})$. Da $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$ ist auch $A \in Mat_{n\times n}(\mathbb{R})$ und sogar $A \in Mat_{n\times n}(\mathbb{C})$. Ändern sich deshalb die charakteristischen und minimalen Polynome von A? Im Abschnitt 11 werden wir den Begriff von Trigonalisierbarkeit (der arme Vetter von Diagonalisierbarkeit) einführen und studieren.

Satz von Cayley Hamilton.
Sei V ein n- dimensionaler K-Vektorraum und $L \in \mathcal{L}(V, V)$, $f :=$ Char. Pol. (L).
Es gilt $f(L) = 0$. Insbesondere teilt Min. Pol. (L) das Char. Pol. (L).

Beweis:
Seien $\mathcal{K}$ die Algebra der Polynome in L und $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ eine Basis für V.
Setze $A := [L]_{\mathcal{B}}$, das heißt $L(\alpha_i) = \sum_{j=1}^{n} A_{ji}\alpha_j$ für alle $1 \le i \le n$.
Wir schreiben diese Gleichungen um, als

(1) $\sum_{j=1}^{n} (\delta_{ij} L - A_{ji} I)(\alpha_j) = 0$ für alle $1 \le i \le n$.

Sei B die $n \times n$-Matrix mit dem Koeffizienten in der Algebra $\mathcal{K}$ definiert durch

$$B_{ij} := \delta_{ij} L - A_{ji} I.$$

Behauptung: Es ist $\det B = f(L) = 0$. Wir argumentieren wie folgt:

Wir haben $f(x) = \det(xI - A) = \det(xI - A)^T$. Wir berechnen: $(xI - A)^T_{ij} = \delta_{ij}x - A_{ji}$. Also ist $(xI - A)^T_{ij}(L) = \delta_{ij}L - A_{ji}I = B_{ij}$. Außerdem gilt: $[\det(xI - A)^T](L) = \det[(xI - A)^T(L)]$ (siehe ÜB). Somit gilt

$$f(L) = [\det(xI - A)](L) = [\det(xI - A)^T](L) = \det[(xI - A)^T(L)] = \det B.$$

Wir zeigen nun dass $\det B = 0$. Dafür genügt es zu zeigen dass $(\det B)(\alpha_k) = 0$ für alle $k = 1, \dots, n$. Wegen (1) gelten für B_{ij} und α_j:

(2) $\sum_{j=1}^{n} B_{ij}(\alpha_j) = 0$ für alle $1 \le i \le n$.

Setze $\tilde{B} := adj B$. Aus (2) folgt für alle k und i : $\tilde{B}_{ki}(\sum_{j=1}^{n} B_{ij}\alpha_j) = 0 = \sum_{j=1}^{n} \tilde{B}_{ki} B_{ij}\alpha_j$.

Wir summieren über i und bekommen:

$$0 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \tilde{B}_{ki} B_{ij}\alpha_j = \sum_{j=1}^{n} \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n} \tilde{B}_{ki} B_{ij}\right)}_{kj\text{-te Koeff. von } \tilde{B}B} (\alpha_j).$$

Nun ist (wegen Korollar 11.7) $\tilde{B}B = (\det B)I$, also $\sum_{i=1}^{n} \tilde{B}_{ki}B_{ij} = \delta_{kj} \det B$.

Also $0 = \sum_{j=1}^{n} \delta_{kj}(\det B)(\alpha_j) = (\det B)(\alpha_k)$. □

Nu beantworten wir die **Wichtige Frage** der Einleitung. Sei $F_0 \subseteq F_1$ eine Körpererweiterung; wir bemerken dass $Mat_{n\times n}(F_0) \subseteq Mat_{n\times n}(F_1)$.

Satz 15.1. Sei $F_0 \subseteq F_1$ eine Körpererweiterung. Sei $A \in Mat_{n\times n}(F_0)$, und seien

$$\text{Char. Pol.}_{F_0}(A) \text{ und Min. Pol.}_{F_0}(A)$$

beziehungsweise

$$\text{Char. Pol.}_{F_1}(A) \text{ und Min. Pol.}_{F_1}(A)$$

die charakteristischen bzw. minimalen Polynome von A jeweils als Element aus $Mat_{n\times n}(F_0)$ und $Mat_{n\times n}(F_1)$. Dann gelten:

(1) $\text{Char. Pol.}_{F_0}(A) = \text{Char. Pol.}_{F_1}(A)$ und

(2) $\text{Min. Pol.}_{F_0}(A) = \text{Min. Pol.}_{F_1}(A)$.

Beweis:

(1) Ist offensichtlich, weil $\det(B)$ nur von Koeffizienten der Matrix B abhängen.

(2) (i) Wir untersuchen zunächst die folgende Frage: Wie entscheiden wir, für den gegebenen Körper K und der natürlichen Zahl $k \in \mathbb{N}$, ob es ein Polynom $p \in K[x]$ gibt mit $\deg(p) = k$ und $p(A) = 0$?

Dafür lösen wir ein Matrixgleichungssystem

$$A^k + x_{k-1}A^{k-1} + \cdots + x_0 I = 0 \tag{$*$}$$

$(*)$ ist also ein lineares Gleichungssystem mit n^2 Gleichungen in der Variablen $x_0, \ldots, x_{k-1}$. Jede Lösung $a_0, \ldots, a_{k-1} \in K$ gibt uns ein Polynom $p(x) := x^k + \sum_{j=0}^{k-1} a_j x^j$ mit $p(x) \in \mathcal{A}(A)$.

Wenn wir $(*)$ für die kleinste natürliche Zahl k, für die es eine Lösung gibt, gelöst haben, dann ist die Lösung $a_0, \ldots, a_{k-1}$ eindeutig, weil sie uns liefert die eindeutig definierten Koeffizienten $1, a_{k-1}, \ldots, a_0$ von $\text{Min. Pol.}_K(A)$ von A über K.

Wir folgern: Sei k minimal, so dass $(*)$ eine Lösung in K hat, dann liefert diese Lösung das $\text{Min. Pol.}_K(A)$.

(ii) Nun untersuchen wir Lösungen für LGS:
Sei $B \in Mat_{m\times n}(F_0)$, $F_0 \subseteq F_1$ Körpererweiterung, $Y \in F_0^{m\times 1}$. Betrachte

$$BX = Y \tag{S}$$

Wir behaupten: wenn (S) eine Lösung in $F_1^{n\times 1}$ hat, dann hat (S) auch eine Lösung in $F_0^{n\times 1}$ (und umgekehrt natürlich!): Dies gilt, weil alleine aus der r.Z.S.F. $(B\,|Y)$ können wir entscheiden ob es Lösungen gibt (siehe LA I Script 6; Satz 6.3 **Zweck**). Nun ist aber die r.Z.S.F. einer Matrix eindeutig (insbesondere unabhängig vom betrachtetem Grundkörper), also ist r.Z.S.F. $(B\,|Y)$ bzgl. F_1 gleich r.Z.S.F. $(B\,|Y)$ bzgl F_0.

Aus (i) und (ii) sehen wir, dass $(*)$ eine Lösung $(a_0, \dots, a_{k-1}) \in F_1^k$ genau dann hat, wenn es eine Lösung in F_0^k hat. Die Eindeutigkeit des Min. Pol.$_{F_1}$ liefert außerdem, dass die Lösung in F_0^k auch $(a_0, \dots, a_{k-1})$ sein muss! □

§ 11 Trigonalisierbarkeit, invariante Unterräume

Sei V ein endlich dim. K-Vektorraum.

Definition 15.2.
$T \in \mathcal{L}(V,V)$ ist trigonalisierbar, falls es eine Basis $\mathcal{B}$ für V gibt, so dass $[T]_{\mathcal{B}}$ eine *obere Dreiecksmatrix* (i.e. $a_{ij=0}$ für $i > j$) ist.

Satz 15.3.
Sei V n-dim., $T \in \mathcal{L}(V,V)$. Es gilt: T ist trigonalisierbar $\Leftrightarrow$ Char. Pol. (T) zerfällt in Linearfaktoren über K (i.e. Char. Pol. $(T) = (x-c_1)^{n_1} \cdots (x-c_k)^{n_k}$ mit $c_i \in K$).

Beweis

"$\Rightarrow$" Klar, weil $[T]_{\mathcal{B}} = A$ eine obere Dreiecksmatrix ist, also $\det(xI - A)$ ist das Produkt $\prod_{i=1}^{n}(x - a_{ii})$ (siehe ÜB).

"$\Leftarrow$" Wir werden per Induktion eine Basis $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ aufbauen, in der $[T]_{\mathcal{B}}$ eine obere Dreiecksmatrix ist. Da T wenigstens einen Eigenwert hat, hat T auch einen Eigenvektor zum Eigenwert $c_1 \in K$. Sei $\alpha \neq 0$ solch ein Eigenvektor und ergänze zu einer Basis $\{\alpha, \beta_2, \dots, \beta_n\}$ für V (geordnet, so dass α der erste Vektor davon ist).
Betrachte diesbezüglich die Matrixdarstellung von T:

$$\left(\begin{array}{c|ccc} c_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ -- & -- & -- & -- \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \\ 0 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \left.\begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array}\right\} \Gamma \in Mat_{(n-1)\times(n-1)}(K) \end{array}$$

Sei $G \in \mathcal{L}(W,W)$, wobei $W := span\{\beta_2, \dots, \beta_n\}$ definiert durch $Gw := \Gamma w$, für alle $w \in W$. Wir sehen also Char. Pol. $(T) = (x - c_1)$ Char. Pol. (G). Da Char. Pol. (T) ein Produkt von linearen Faktoren ist, so ist es auch Char. Pol. (G). Die Induktionsannahme liefert eine Basis $\{\alpha_2, \dots, \alpha_n\}$, in der G eine obere Dreiecksmatrix-Darstellung hat:

$$\left(\begin{array}{c|ccc} c_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ -- & -- & -- & -- \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & \ddots \end{array}\right)$$

Setze $\alpha_1 := \alpha$ und setze $\mathcal{B} := \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ □