# 10 Script zur Vorlesung: Lineare Algebra II(SoSe 2020)

**Prof. Dr. Salma Kuhlmann**

*In diesem Skript werden wir einige Eigenschaften der Determinante, die wir im LA I Skript 28 gelernt und bewiesen hatten, hier anderweitig beweisen.*

**Korollar 10.1.**
Für alle $\delta \in alt^{(n)}$ und $A \in M_{n\times n}(K)$ gilt $\delta(A) = \det(A)\delta(I_n)$.

**Beweis:**
Da $\det \in alt^{(n)}$ und $\det \neq 0$, ist $\dim(alt^{(n)}) = 1$ (siehe Korollar 9.11).
Sei $\delta \in alt^{(n)}$. Also ist $\delta = d\det$ für $d \in K$. Nun muss gelten $\delta(I_n) = d\det(I_n)$, also $d = \delta(I_n)$. □

**Bemerkung 10.2.**
Sei $R$ ein kommutativer Ring mit 1. $\delta \in alt^{(n)}(R^n)$ ist analog definiert. Der Hauptsatz gilt auch in diesem erweiterten Rahmen:
Sei $A \in M_{n\times n}(R)$; $A = (a_{ij})_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq n}$. Definiere:

$$\det(A) := \sum_{\pi\in S_n} sign(\pi) a_{1\pi(1)}\cdots a_{n\pi(n)}.$$

Dann ist det die eindeutige Funktionale $\delta \in alt^{(n)}(R^n)$ mit der Eigenschaft $\delta(I_n) = 1$.

**Beispiel 10.3.**
Setze $R := K[x]$, und $A = \begin{pmatrix} x & 0 & -x^2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & x^3 \end{pmatrix}$

Sei $\delta \in alt^{(3)}(M_{3\times 3}(R))$ so definiert: $\delta(A) = \delta(x\varepsilon_1 - x^2\varepsilon_3, \varepsilon_2, \varepsilon_1 + x^3\varepsilon_3)$,
wobei $\varepsilon_1 = (1,0,0), \varepsilon_2 = (0,1,0)$ und $\varepsilon_3 = (0,0,1)$. Wir berechnen:

$$\begin{aligned}\delta(A) &= x\delta(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_1 + x^3\varepsilon_3) - x^2\delta(\varepsilon_3,\varepsilon_2,\varepsilon_1 + x^3\varepsilon_3) \\ &= x\delta(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_1) + x^4\delta(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3) - x^2\delta(\varepsilon_3,\varepsilon_2,\varepsilon_1) - x^5\delta(\varepsilon_3,\varepsilon_2,\varepsilon_3) \\ &= (x^4 + x^2)\delta(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3).\end{aligned}$$

**Erinnerung:**
$(A^T)_{ji} = A_{ij}$ oder $a^T_{ji} = a_{ij}$.

**Satz 10.4.**
Sei $A \in M_{n\times n}(R)$. Es gilt: $\det(A) = \det(A^T)$.

**Beweis:**
Betrachte
$$\prod_{i=1}^{n} a_{i\pi(i)} = \prod_{i,j=1,j=\pi(i)}^{n} a_{ij} = \prod_{i,j=1,i=\pi^{-1}(j)}^{n} a_{ij} = \prod_{j=1}^{n} a_{\pi^{-1}(j)j} = \prod_{j=1}^{n} a^T_{j\pi^{-1}(j)}$$
für $\pi \in S_n$.

Wir berechnen nun
$\det(A) = \sum_{\pi\in S_n} sign(\pi) \prod_{i=1}^{n} a_{i\pi(i)} = \sum_{\pi^{-1}\in S_n} sign(\pi^{-1}) \prod_{j=1}^{n} a^T_{j\pi^{-1}(j)} = \det(A^T)$. □

**Satz 10.5.**
$\det(AB) = \det(A)\det(B)$, für $A, B \in M_{n\times n}(R)$.

**Beweis:**

Fixiere $B \in M_{n\times n}(R)$, und setze $A = \begin{pmatrix} z_1 \\ --- \\ .... \\ --- \\ z_n \end{pmatrix}$.

Definiere $\delta_B(A) := \det(AB)$ ; also $\delta_B(z_1, \ldots, z_n) = \det(z_1B, \ldots, z_nB)$.
Dann ist $\delta_B$ $n$-linear und alternierend:

$n$-linear?
$\delta_B(z_1 + cz_1', z_2, \ldots, z_n) = \det((z_1 + cz_1')B, \ldots, z_nB) =$
$\det(z_1B, z_2B, \ldots, z_nB) + c\det(z_1'B, z_2B, \ldots, z_nB)$ (weitere Details als ÜA).

alternierend?
$\delta_B(z_1, z_1, \ldots, z_n) = \det(z_1B, z_1B, \ldots, z_nB) = 0$ (weitere Details als ÜA).

Also $\delta_B \in alt^{(n)}$ und Korollar 10.1 $\Rightarrow \delta_B(A) = \det(A)\delta_B(I_n) = \det(A)\det(B)$. □

**Korollar 10.6.**
Sei $A$ invertierbar. Es gilt $\det(A^{-1}) = [\det(A)]^{-1}$.

**Beweis:**
$\det(AA^{-1}) = \det(A)\det(A^{-1}) = \det(I_n) = 1$. □

**Notation (Erinnerung):**
Sei $A \in M_{n\times n}(R)$ und $i, j \in \{1, \ldots, n\}$. Wir bezeichnen mit $A[i \mid j]$ ist die $(n-1)\times(n-1)$-Matrix, die man nach Entfernung der $i$-ten Zeile und $j$-ten Spalte von $A$ bekommt, und setzen $D_{ij}(A) := \det(A[i \mid j])$.

**Satz 10.7.**
Fixiere $j$ mit $1 \le j \le n$. Setze
$$\delta(A) := \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} D_{ij}(A).$$
Dann ist $\delta \in alt^{(n)}$ und $\delta(I_n) = 1$.

**Beweis**:
$n$-linear? Für $i, j$ ist $a_{ij}D_{ij}(A)$ $n$-linear (ÜA). Da Eine lineare Kombination von $n$-linearen wieder $n$-linear ist, folgt $\delta$ $n$-linear.

alternierend?
Sei $A = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$ und seien $z_k = z_\ell$ für $k < \ell$.

Für $i \neq k$ und $i \neq \ell$, hat $A[i \mid j]$ zwei gleiche Zeilen, also ist $D_{ij}(A) = 0$. Wir berechnen:

$$\begin{aligned} \delta(A) &= (-1)^{k+j} a_{kj} D_{kj}(A) + (-1)^{\ell+j} a_{\ell j} D_{\ell j}(A) \\ &= (-1)^{k+j} a_{kj} D_{kj}(A) + (-1)^{\ell+j} a_{kj} D_{\ell j}(A) \end{aligned} \qquad (*)$$

weil $a_{\ell j} = a_{kj}$ ist.

Betrachte:

$$A[k \mid j] = \underset{\text{(I)}}{\begin{pmatrix} z_1^- \\ \vdots \\ z_{k-1}^- \\ z_{k+1}^- \\ \vdots \\ z_\ell^- \\ \vdots \\ z_n^- \end{pmatrix}} \text{ und } A[\ell \mid j] = \underset{\text{(II)}}{\begin{pmatrix} z_1^- \\ \vdots \\ z_k^- \\ \vdots \\ z_{\ell-1}^- \\ z_{\ell+1}^- \\ \vdots \\ z_n^- \end{pmatrix}}$$

- Die $(\ell-1)$-te Zeile von (I) ist $z_\ell^- = z_k^-$ und
- die $k$-te Zeile von (II) ist ebenfalls $z_\ell^- = z_k^-$.

Ein Vergleich von (I) und (II) ergibt: $A[k \mid j]$ und $A[\ell \mid j]$ haben die gleichen Zeilen, bis auf die Permutation der Zeilen!!

Man kann durch wiederholte Zeilenumformunten aus Typ 1 $A[\ell \mid j]$ aus $A[k \mid j]$ erhalten, indem man die $(\ell-1)$-te Zeile in (I) bis zur $k$-ten Zeile in (II) rückt. Dafür benötigt man $(\ell-1)-k$ Transpositionen, genauer benötigen wir dafür die Permutationen $(\ell-1\ \ell-2)$, dann $(\ell-2\ \ell-3)$, $\cdots$, $(\ell-(\ell-k-1)\ \ell-(\ell-k))$ i.e. bis $(k+1\ k)$.

Setze $\pi := (k+1\ k)\cdots(\ell-1\ \ell-2)$. Dann ist $sign(\pi) = (-1)^{(\ell-1)-k}$. Also $D_{\ell j}(A) = (-1)^{(\ell-1)-k} D_{kj}(A)$ (siehe Lemma 9.1 (ii)).

Zurück zu $(*)$:

$$\delta(A) = (-1)^j \Big[ \underbrace{(-1)^k a_{kj} D_{kj}(A)}_{\text{1. Term}} + \underbrace{(-1)^{2\ell-1-k} a_{kj} D_{kj}(A)}_{\text{2. Term}} \Big]$$

Aber $(-1)^k = -[(-1)^{2\ell-1-k}] = (-1)^{2(\ell-1)-k}$.
Also kürzen sich 1. Term und 2. Term ab und damit ist $\delta(A) = 0$ wie behauptet.

Wir berechnen nun $\delta(I_n) = 1$. Für $A = I_n; a_{ij} = 0$, wenn $i \neq j$. Also betrachte nun $i = j$, i.e. $a_{jj} = 1$. Wir bekommen $\delta(I_n) = (-1)^{2j}.a_{jj} \det(I_{n-1}) = (-1)^{2j}.1.1 = 1$. □

Aus Satz 10.7 erhalten wir unmittelbar LA I Satz 28.5:

**Korollar 10.8. (Spaltenentwicklung)**
Sei $A \in M_{n\times n}(R)$. Für jedes $1 \leq j \leq n$ gilt

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} D_{ij}(A).$$