23 Skriptskizze zur Vorlesung: Lineare Algebra I

Prof. Dr. Salma Kuhlmann

Kapitel 4: Determinante: eine Einführung

Die Determinanten werden in LA II ausfürlich behandelt (siehe Gesamtskript LA II: Kapitel II).

Erinnerung:

(i) $\det(a) = a \quad (1 \times 1 \text{ Determinante})$

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc \quad (2 \times 2 \text{ Determinante})$$

(ii) Für $n > 2$ wird die Determinante rekursiv wie folgt definiert:

Definition 23.1. Sei A eine $n \times n$ Matrix. Wir bezeichnen mit

(i) M_{ij} die Determinante der $(n-1) \times (n-1)$ Matrix, die wir erhalten, indem wir von A die i-te Zeile und die j-te Spalte von A streichen.

(ii) $C_{ij} := (-1)^{i+j} M_{ij}$ heißt der ij**-te Kofaktor** und M_{ij} der ij**-te Minor** oder der Minor $(n-1)$**-ter Ordnung** $(1 \leq i, j \leq n)$.

Beispiel 23.2. Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 2 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 8 \end{pmatrix}.$$

Wir berechnen

$$M_{11} = \det \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} = 16$$

Also $C_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = M_{11} = 16$. Analog

$$M_{32} = \det \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} = 26$$

und somit $C_{32} = (-1)^{3+2} M_{32} = -26$.

Definition 23.3. (Kofaktoren-Entwicklung)

$$\det(A) := a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + \ldots + a_{1n}C_{1n}$$

ist die *Kofaktoren-Entwicklung nach der* 1*-ten Zeile* der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad (*)$$

Beispiel 23.4. $(n = 3)$ Aus

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} := \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$
$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

ergibt sich

$$\det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

Satz 23.5. Sei A eine $n \times n$ Matrix wie in $(*)$. $\forall i, j \in \{1, \dots, n\}$ gilt:

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}C_{ij} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}C_{ij}$$

(d.h. $\det(A)$ ist auch gleich der Kofaktoren-Entwicklung nach der i-ten Zeile, beziehungsweise der j-ten Spalte).

Der Beweis von diesem wichtigen Satz wird ausführlich in der Vorlesung LA II behandelt. Hierfür werden wir die Theorie der multilinearen alternierenden Formen entwickeln.

Beachte jedoch: Man kann den Satz jetzt schon per Induktion nach n beweisen! Wir werden den Satz aber fürs Erste ohne Beweis als wahr annehmen. Wir werden viel Korollare folgern!

Korollar 23.6. Sei A eine $n \times n$ Dreiecksmatrix wie in $(*)$. Dann ist

$$\det(A) = \prod_{i=1}^{n} a_{ii} \quad \text{(Produkt der Diagonaleinträge)}$$

Beweis

Sei A ohne Einschränkung eine untere Dreiecksmatrix, d.h. $a_{ij} = 0$ für alle $1 \leq i, j \leq n$ mit $i < j$. Beachte, dass jede Untermatrix wie in Definition 23.1 (i) wieder eine untere Dreiecksmatrix ist. Wir beweisen das Korollar per Induktion nach n.

Anwenden von Definition 23.3 (Kofaktoren-Entwicklung nach der ersten Zeile) ergibt

$$\det(A) = a_{11}C_{11} + 0 + 0 + \ldots + 0 = a_{11}(-1)^2 M_{11} = a_{11}M_{11}.$$

Nun ist M_{11} die Determinante der Untermatrix die wir erhalten, indem wir von A die erste Zeile und die erste Spalte streichen. Diese $(n-1) \times (n-1)$ Matrix ist wieder eine untere Dreiecksmatrix mit diagonalen Einträgen $a_{22} \ldots, a_{nn}$.

Die Induktionsannahme ergibt nun $M_{11} = \prod_{i=2}^{n} a_{ii}$, und somit ist

$$\det(A) = a_{11}\prod_{i=2}^{n} a_{ii} = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$$

Der Fall, in welchem A eine obere Dreiecksmatrix ist (d.h. $i > j \Rightarrow a_{ij} = 0$) wird analog bewiesen. □

Korollar 23.6 enthält die Schlüsselidee zur Berechnung von Determinanten per Gauß-Verfahren (r.Z.s.F.), wie wir später in Satz 23.9 sehen werden.

Korollar 23.7. Wenn A eine Nullzeile enthält, dann ist $\det(A) = 0$.

Beweis
Sei die i-te Zeile die Nullzeile. Die Berechnung von $\det(A)$ per Entwicklung nach der i-ten Zeile gemäß Satz 23.5 ergibt

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} 0C_{ij} = 0.$$

□

Korollar 23.8. Es gilt $\det(A) = \det(A^t)$.

Beweis
Die Zeilen von A sind die Spalten von A^t. Die Behauptung folgt daher sofort aus Satz 23.5. □

Satz 23.9. (Auswirkung von Zeilenumformungen)
Sei A eine $n \times n$ Matrix und B die Matrix, die wir erhalten, indem wir genau eine elementare Zeilenumformung ausüben. Dann gilt:

(a) $\det(B) = -\det(A)$ (für Typ 1)

(b) $\det(B) = c\det(A)$ (für Typ 2, $c \in K^\times = K \setminus \{0\}$)

(c) $\det(B) = \det(A)$ (für Typ 3)

Den Beweis von Satz 23.9 werden wir ebenfalls in LA II führen. Man könnte den Satz auch jetzt schon per Induktion nach n beweisen. Im Folgenden werden wir ihn einfach als gegeben voraussetzen.

Korollar 23.10. Sei A eine $n \times n$ Matrix mit zwei verschiedenen Zeilen Z_i und Z_j, so dass $Z_i = cZ_j$ für ein $c \in K^\times$. Dann ist $\det(A) = 0$.

Beweis
Dies folgt aus Korollar 23.7 und Satz 23.9(c). □

Korollar 23.10 gilt auch fü Spalten anstatt Zeilen.

Beispiel 23.11. (Berechnung von $\det(A)$ per r.Z.s.F.)

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 3 & -6 & 9 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix} &= -\begin{vmatrix} 3 & -6 & 9 \\ 0 & 1 & 5 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix} \quad (\text{Typ 1}; Z_1 \leftrightarrow Z_2) \\
&= -3\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix} \quad (\text{Typ 2}; Z_1 : 3) \\
&= -3\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 10 & -5 \end{vmatrix} \quad (\text{Typ 3}; -2Z_1 + Z_3) \\
&= -3\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -55 \end{vmatrix} \quad (\text{Typ 3}; -10Z_2 + Z_3) \\
&= (-3)(-55)\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad (\text{Typ 2}; Z_3 : (-55)) \\
&= (-3)(-55)(1)(1)(1) \quad (\text{Korollar 23.6}) \\
&= 165
\end{aligned}$$