Inhaltsverzeichnis zur Vorlesung: Lineare Algebra I

Prof.'in Dr. Salma Kuhlmann

1 Script zur Vorlesung: Lineare Algebra I

Prof. Dr. Salma Kuhlmann

Kapitel 1: § 1 Gruppen, Ringe, Körper

Bezeichnung 1.1.
$\mathbb{N} := \{1, 2, \ldots\}$ die Menge der natürlichen Zahlen
$\mathbb{N}_0 := \{0, 1, \ldots\} = \{0\} \cup \mathbb{N}$.
$\mathbb{Z} :=$ Menge der ganzen Zahlen,
$\mathbb{Q} :=$ Menge der rationalen Zahlen,
$\mathbb{R} :=$ Menge der reellen Zahlen.
$\mathbb{Q}^\times = \mathbb{Q}\backslash\{0\}$
$\mathbb{R}^\times = \mathbb{R}\backslash\{0\}$

Definition 1.2.
(i) Eine *Verknüpfung* (oder binäre Operation) (auf einer Menge G) ist eine Funktion:

$$* : G \times G \to G.$$

Bezeichnung 1.3.
$* \, (g, h) := g * h$

(ii) Sei $G \neq \emptyset$.

Das Paar $(G, *)$ ist eine *Gruppe*, wenn

Assoziativ	-	$(g * h) * k = g * (h * k) \quad \forall g, h, k, \in G$
Neutrales Element	-	$\exists e \in G$ s.d. $e * g = g = g * e \quad \forall g \in G$
Ex. von Inversen	-	$\forall g \in G \exists h \in G$ s.d. $g * h = e = h * g$
NB:		Eindeutigkeit von neutralem Element und Inversen; siehe ÜB.
Kommutativ oder abelsch	-	$g * h = h * g \quad \forall h, g \in G$

Beispiel 1.4.
I) $(\mathbb{Z}, +), (\mathbb{Q}, +), (\mathbb{R}, +)$
II) $(\mathbb{Q}^\times, \cdot), (\mathbb{R}^\times, \cdot)$
III) $F := \{f | f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$
Verknüpfung: $f, g \in F$ definiere $f + g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $(f + g)(r) := f(r) + g(r) \quad \forall r \in \mathbb{R}$.

Neutrales
$Z : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$Z(r) = 0 \quad \forall r \in \mathbb{R}$

Inverse
$-f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$(-f)(r) := -(f(r)) \quad \forall r \in \mathbb{R}.$

Dies sind abelsche (siehe Übungsblatt für nicht abelsche) und unendliche Gruppen. Wir konstruieren nun Beispiele von endlichen Gruppen.

Divisionsalgorithmus
Seien $a, b, \in \mathbb{Z};\ b > 0$. $\exists!\ q, r \in \mathbb{Z}$ mit $0 \leq r < b$ und $a = bq + r$.

Beweis
• Betrachte zunächst den Fall $a > 0$. Falls $0 < a < b$ setze $q := 0$ und $r := a$, sonst $a \geq b$.
Betrachte die Menge $S := \{s \in \mathbb{N}; sb \leq a\}$. $1 \in S$ also $S \neq \emptyset$; und S ist endlich.
Setze $q := \max S$
$r := a - qb$ (also $r = 0$ gdw $a = qb$)

Behauptung
$\underbrace{0 \leq r}_{r \geq 0} < b$
gilt per Definition.

Widerspruchsbeweis:
Wenn $r \geq b$, dann $a - qb \geq b$ i.e. $a \geq qb + b$ i.e. $a \geq (q+1)b$, also $q + 1 \in S$ aber $q + 1 > q$. - Widerspruch.

Eindeutigkeit
$$\left.\begin{aligned} a &= q_1 b + r_1 \\ a &= q_2 b + r_2 \end{aligned}\right\} \qquad (\dagger).$$
Also von $(\dagger) : 0 = (q_2 - q_1)b + (r_2 - r_1)$.

Widerspruchsbeweis:
Wenn $r_1 > r_2$, dann $(r_1 - r_2) > 0$. Also ergibt sich aus $(\dagger)$:
$$0 < (r_1 - r_2) = \underbrace{(q_2 - q_1)b}_{b>0,} \qquad (*)$$
Also $(q_2 - q_1) > 0$. Also $(q_2 - q_1)b \geq b$.
Andererseits: $r_1 < b$ und $r_2 \geq 0$ also $(r_1 - r_2) < (b - r_2) \leq b$.

Mit $(*)$ erhält man einen Widerspruch: linke Seite in $(*) :< b$; rechte Seite in $(*) :\geq b$. - Widerspruch.

Also $r_1 = r_2$ und mit $(\dagger)$ bekommt man auch $q_1 = q_2$.

• Sei nun $c \in \mathbb{Z},\ c \leq 0$. Wenn $c = 0$, setze $q := 0$ und $r := c$, $c = 0 = 0b + 0$. Wenn $c < 0$, setze $a := (-c)$, dann ist $a > 0$. Also $\exists! q, r$ mit $0 \leq r < b$ und $a = bq + r$.

$$
\begin{array}{lllll}
r = 0 & \Rightarrow & c = -a & = & b(-q) \\
r \neq 0 & \Rightarrow & c = -a & = & b(-q) + (-r) \\
 & & & = & b(-q) - b + (b - r) \\
 & & & = & b(-q - 1) + (b - r) \\
 & & & = & b[-(q + 1)] + \underbrace{(b - r)}_{0<r<b} \\
 & & & & \text{also } 0 > -r > -b \\
 & & & & \text{also } b > (b - r) > 0.
\end{array}
$$

$\square$

2 Script zur Vorlesung: Lineare Algebra I

Prof. Dr. Salma Kuhlmann

Aus Divisionsalgorithmus: Sei $n \in \mathbb{N}$. $\mathbb{Z}_n := \{0, \ldots, n-1\}$ ist die Menge der "Reste" für die Division durch n.

Bezeichnung 2.1.
$a \in \mathbb{Z}$; $\overline{a} :=$ Rest der Division von a durch n.
i.e. $\quad a = qn + \overline{a} \quad 0 \leq \overline{a} < n$
i.e. $\quad$ mit $\overline{a} \in \{0, \ldots, n-1\}$.

Wir definieren eine Verknüpfung:
Für $x, y \in \mathbb{Z}_n$ definiere $x +_n y := \overline{x + y}$.

Behauptung 2.2.
$(\mathbb{Z}_n, +_n)$ ist eine abelsche Gruppe.

Fall 1 $n = 1 \quad \mathbb{Z}_n = \{0\}$ die *triviale* Gruppe.
Fall 2 Sei $n \geq 2$.

• Kommutativ? Seien $x, y \in \mathbb{Z}_n$. $x +_n y = y +_n x$?
L.S. berechnen:

$$x +_n y \underset{\text{Def. von } +_n}{=} \overline{x + y} = \underset{\substack{\text{weil } (\mathbb{Z}, +) \\ \text{abelsche Gruppe}}}{\overline{y + x}} \underset{\text{Def. von } +_n}{=} y +_n x$$

• Assoziativ? Seien $x, y, z \in \mathbb{Z}_n$.

$$(x +_n y) +_n z \underset{?}{=} x +_n (y +_n z)$$

Berechne L.S.:
Setze $\overline{x + y} = r_1$ und $\overline{r_1 + z} := r_2$.
Also $x + y = q_1 n + r_1$, und $r_1 + z = q_2 n + r_2$.
Also $(x + y) + z = (q_1 + q_2)n + r_2$. $\qquad (*)$

Berechnung der R.S.:
Setze $\overline{y + z} := r_3$ und $\overline{x + r_3} := r_4$.
Also $y + z = q_3 n + r_3$ und $x + r_3 = q_4 n + r_4$.
Also $x + (y + z) - q_3 n = q_4 n + r_4$.
Also $x + (y + z) = (q_3 + q_4)n + r_4$. $\qquad (**)$

Nun vergleiche $(*)$ und $(**)$ und beachte, dass $(x+y)+z = x+(y+z)$ in $\mathbb{Z}$.

$$\begin{array}{lrcll} \text{Also} & (x+y)+z & = & (q_1+q_2)n + r_2 & = \\ & x+(y+z) & = & (q_3+q_4)n + r_4 & \end{array}$$

Eindeutigkeit von Rest im Divisionsalgorithmus $\Rightarrow r_2 = r_4$

i.e. $\overline{\overline{x+y}+z} = \overline{x+\overline{y+z}}$

i.e. $(x +_n y) +_n z = x +_n (y +_n z)$ wie erwünscht.

- Ex. von neutralem Element $0 \in \mathbb{Z}_n$. Sei $x \in \mathbb{Z}_n$.
  $x +_n 0 \underset{?}{=} x$
  $x +_n 0 = \overline{x+0} = \overline{x}$.
  Aber für $x \in \mathbb{Z}_n$ gilt $\overline{x} = x$. Also $x +_n 0 = x$.

- Ex. von additiven Inversen.
  Sei $x \in \{0, 1, \dots, n-1\}$. Falls $x = 0$, setze $-x = 0$.
  Sei nun $x \neq 0$ und setze $-x := (n-x) \in \mathbb{Z}_n$.
  Es gilt $x +_n (-x) = \overline{x+(-x)} = \overline{n} = 0$ wie erwünscht.

Definition 2.3.
Ein Tripel $(R, +, \cdot)$ ist ein *Ring mit Eins*, falls:

- R ist eine nichtleere Menge und
- $+, \cdot$ sind Verknüpfungen auf R und
- $(R, +)$ ist eine abelsche Gruppe mit neutralem Element $0 \in R$ und $(R, \cdot)$ ist ein *Monoid*, d.h.
- $\cdot$ ist assoziativ und es existiert $1 \in R$ mit $x \cdot 1 = 1 \cdot x = x \ \forall x \in R$ und
- $1 \neq 0$ und
- die Distributivitätsgesetze gelten:

Links: $x \cdot (y+z) = (x \cdot y) + (x \cdot z) \ \forall x, y, z \in R$ und

Rechts: $(y+z) \cdot x = (y \cdot x) + (z \cdot x) \ \forall x, y, z \in R$

Definition 2.4.
Ein Ring $(R, +, \cdot)$ ist *kommutativ* falls $x \cdot y = y \cdot x \ \forall x, y \in R$.

Beispiel 2.5.
$(\mathbb{Z}, +, \cdot), (\mathbb{Q}, +, \cdot), (\mathbb{R}, +, \cdot)$.

Gibt es endliche Beispiele?

Auf $\mathbb{Z}_n$ definieren wir: $x \cdot_n y := \overline{xy}$.

Übungsaufgabe: Prüfe, dass für $n > 1$ $(\mathbb{Z}_n, +_n, \cdot_n)$ ein kommutativer Ring mit Eins ist.

Bezeichnung 2.6.
$F^\times := F \backslash \{0\}$.

Definition 2.7.
$(F, +, \cdot)$ ist ein *Körper*, falls $F \neq \emptyset, (F, +)$ und $(F^\times, \cdot)$
abelsche Gruppen sind mit 0 bzw. 1 als neutrale Elemente, $1 \neq 0$ und die Distributivitätsgesetze gelten.

Bemerkung 2.8.
Also $(F, +, \cdot)$ ist ein Körper, falls $(F, +, \cdot)$ ein kommutativer Ring mit Eins ist und alle $x \in F^\times$ sind *multiplikativ invertierbar*, d.h. $\exists x^{-1} \in F^\times$ mit $x \cdot x^{-1} = 1$.

Beispiel 2.9.
$(\mathbb{Q}, +, \cdot), (\mathbb{R}, +, \cdot)$ und später $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ sind Körper.

Frage
Gibt es endliche Körper? Insbesondere betrachten wir nun die Frage:
Ist der Ring $(\mathbb{Z}_n, +, \cdot)$ ein Körper?
Wir werden zeigen: $(\mathbb{Z}_n, +, \cdot)$ ist ein Körper, genau dann, wenn $n = p$ Primzahl.

3 Script zur Vorlesung: Lineare Algebra I

Prof. Dr. Salma Kuhlmann

In Script 2 haben wir gesehen, dass für $n > 1$ $(\mathbb{Z}_n, +_n, \cdot_n)$ ein kommutativer Ring mit Eins ist. Wir wollen nun zeigen, dass $(\mathbb{Z}_n, +_n, \cdot_n)$ ein Körper ist, genau dann, wenn $n = p$ eine Primzahl (Definition 3.4 siehe unten) ist.

"$\Rightarrow$":

Lemma 3.1.
Jeder Körper ist ein *Integritätsbereich*, d.h. aus $xy = 0$ folgt $x = 0$ oder $y = 0$, $\forall x, y$.

Beweis
Sei $xy = 0$ und $x \neq 0$. Also $x^{-1}(xy) = x^{-1}0 = 0$, d.h. $(x^{-1}x)y = 1.y = y = 0$. □

Bemerkung 3.2.
Hier haben wir benutzt:
$\forall z(z.0) = 0$. (Übungsaufgabe).

Sei nun $n > 1$. Wir zeigen:

Korollar 3.3.
Sei $n > 1, (\mathbb{Z}_n, +_n, \cdot_n)$ Körper $\Rightarrow n = p$ ist eine Primzahl.

Beweis
Annahme: n ist *keine* Primzahl. Also $n = xy$ mit $1 < x < n, 1 < y < n$.
Also $x, y, \in \mathbb{Z}_n, x \neq 0, y \neq 0$, aber $x \cdot_n y = \overline{xy} = 0$. Also ist $(\mathbb{Z}_n, +_n, \cdot_n)$ *kein* Körper. □

"$\Leftarrow$":
Wir wollen nun zeigen, dass $n = p$ Primzahl $\Rightarrow (\mathbb{Z}_p, +_p, \cdot_p)$ ist ein Körper.

Dafür wollen wir explizit die multiplikativen Inversen berechnen:
Der Euklidische Algorithmus.

Definition 3.4. (Erinnerung)

(i) (positive) Divisoren
$a, b \in \mathbb{Z}; b > 0; a = bq + r$. Falls $r = 0$: b teilt a; Bezeichnung: $b \mid a$.
b ist ein *Divisor von* a oder a ist ein *Vielfaches von* b.

(ii) $p \in \mathbb{N}$ $(p > 1)$ ist eine Primzahl, falls 1 und p die einzigen (positiven) Divisoren von p sind.

(iii) $\mathbb{N} \ni d$ ist ein *gemeinsamer Teiler* von a und b falls $d \mid a$ und $d \mid b$ (schreibe: d ist $gT(a, b)$).

(iv) $\mathbb{N} \ni d$ ist der größte gemeinsame Teiler von a und b (Bezeichnung: $d = ggT(a, b)$), falls d gemeinsamer Teiler und d die größte natürliche Zahl mit dieser Eigenschaft ist.

Äquivalent:
$\forall d' : d' \in \mathbb{N}$ und d' gemeinsamer Teiler von a und b gilt: $d' \mid d$.

Bemerke: Die Menge der gemeinsamen Teiler zweier Zahlen a und b mit $b \neq 0$ enthält stets die 1, ist also nicht leer und außerdem durch das Maximum von a und b nach oben beschränkt. Also existiert zu je zwei solchen Zahlen der größte gemeinsame Teiler.

Der Euklidische Algorithmus (zum Berechnen von $ggT(a,b)$):
$a, b \in \mathbb{Z};\ b > 0;\ b|a \Rightarrow ggT(a,b) = b$
sonst:

$$\begin{array}{rcll} a &=& b\ q_1 + r_1 & \quad 0 < r_1 < b \\ b &=& r_1\ q_2 + r_2 & \quad 0 < r_2 < r_1 \\ r_1 &=& r_2\ q_3 + r_3 & \quad 0 < r_3 < r_2 \\ \vdots & & & \end{array}$$

Rekursion (ρ)

$$\begin{array}{llll} r_{j-1} = & r_j\ q_{j+1} & + \ r_{j+1} & \quad 0 < r_{j+1} < r_j \\ \vdots & & & \\ r_{n-3} = & r_{n-2}\ q_{n-1} & + \ r_{n-1} & \quad 0 < r_{n-1} < r_{n-2} \\ r_{n-2} = & r_{n-1}\ q_n & + \ r_n & \quad 0 < r_n < r_{n-1} \\ n \text{ maximal} & \text{mit} & r_n \neq 0 & \end{array}$$

Absteigende Folge von natürlichen Zahlen *muss* anhalten nach
$0 < r_n < r_{n-1} < \ldots < r_2 < r_1 < b$ endlich vielen Schritten.

Behauptung 3.5.
$r_n = ggT(a,b)$

Die Behauptung folgt aus:

Lemma 3.6.
$a = bq + r \ \Rightarrow \ ggT(a,b) = ggT(b,r)$

Beweis
Setze $d := ggT(b,r)$

(1) $d \mid b$ und $d \mid r \ \Rightarrow \ d \mid a$ also d ist $gT(a,b)$

(2) Ferner $d' \mid a$ und $d' \mid b \ \Rightarrow \ d' \mid a - bq$ i.e. $d' \mid r$. Also $d' \mid d$.
Also $d = ggT(a,b)$ wie behauptet. $\square$

Und ferner in (ρ):

Bemerkung 3.7.
$r_n = ggT(r_{n-1}, r_{n-2})$ weil

$$\left.\begin{array}{c} r_n \mid r_{n-1} \\ \text{und} \\ r_n \mid r_n \end{array}\right\} \Rightarrow r_n \mid r_{n-2}$$

und $d' \mid r_{n-1}, \quad d' \mid r_{n-2} \;\Rightarrow\; d' \mid (r_{n-2} - r_{n-1}q_n)$, i.e. $d' \mid r_n$

Also (in (ρ)): $ggT(a,b) = ggT(b, r_1) = ggT(r_1, r_2) = \ldots = ggT(r_{n-1}, r_{n-2}) = r_n$.

Definition 3.8.
Eine (ganze) lineare Kombination von a und b (über $\mathbb{Z}$) ist eine ganze Zahl γ der Gestalt:
$\gamma := \alpha a + \beta b$ wobei $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$.

Bemerkung 3.9.

(1) Wir haben ständig die folgende Tatsache benutzt:
$d' \mid a$ und $d' \mid b \;\Rightarrow\; d'$ teilt jede lineare Kombination von a und b, weil
$\gamma = \alpha d'a' + \beta d'b' = d'(\alpha a' + \beta b')$

(2) **Rückwärts EA:**
$ggT(a,b) = r_n$ ist eine lineare Kombination (über $\mathbb{Z}$) von a und b:
Rekursion (ρ):
$r_n = \boxed{r_{n-2}} - \boxed{r_{n-1}}\, q_n$. Aber hier werden nur r_{n-1}, r_{n-2} benötigt.

$r_{n-1} = r_{n-3} - r_{n-2}\; q_{n-1}$

Also $\quad r_n = r_{n-2} - [r_{n-3} - r_{n-2}\; q_{n-1}]q_n$.

Hier werden nur r_{n-2}, r_{n-3} benötigt.
Verfahre so weiter.
Für numerische Beispiele und Berechnungen siehe Übungsblatt.

(3) $ggT(a,b) = ggT(b,a)$ $(a, b > 0)$.

4 Script zur Vorlesung: Lineare Algebra I

Prof. Dr. Salma Kuhlmann

Korollar 4.1.
$n = p$ ist eine Primzahl $\Rightarrow$ $(\mathbb{Z}_p, +_p, \cdot_p)$ ist ein Körper.

Bezeichnung 4.2.
$\mathbb{F}_p$, $\mid \mathbb{F}_p \mid = p$

Beweis
$(\mathbb{Z}_p, +_p, \cdot_p)$ ist ein kommutativer Ring mit Eins. Sei nun $x \in \mathbb{Z}_p,\ x \neq 0$.
Wir wollen zeigen: $\exists y \in \mathbb{Z}_p$ mit $\overline{xy} = x \cdot_p y = 1$.
Nun $x \in \{1, \ldots, p-1\}$ und p prim $\Rightarrow$ $ggT(x,p) = 1$. Also $\exists \alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ mit $\alpha \neq 0$ und $\alpha x + \beta p = 1. \qquad (*)$
Also $\alpha x = (-\beta)p + 1$. A priori $\alpha \in \mathbb{Z}$, nehme $\overline{\alpha} \in \{1, \ldots, p-1\}$.
(Bemerke, dass $\overline{\alpha} \neq 0$, sonst $p\ |\alpha$. Aber dann im $(*)$ $p \mid 1$; Unsinn).
Also $\alpha = qp + \overline{\alpha} \qquad (**)$
$(**)$ in $(*)$ ergibt: $(qp + \overline{\alpha})x + \beta p = 1$.
Also $\overline{\alpha}x + qxp + \beta p = 1$.
Also $\overline{\alpha}x + (qx + \beta)p = 1 \quad \Rightarrow \overline{\alpha}x = -(qx + \beta)p + 1 \qquad (***)$
mit $\overline{\alpha} \in \mathbb{Z}_p$.

Setze $\overline{\alpha} := y$.
Berechne $x \cdot_p y = \overline{xy} = 1$ aus $(***)$ und Eindeutigkeit von Rest in DA. $\square$

ÜA für ÜB: Zeige folgende:

Proposition 4.3.
Sei p eine Primzahl, $a, b \in \mathbb{N}$. Wenn $p \mid ab$, dann $p \mid a$ oder $p \mid b$.

Frage: Gibt es andere endliche Körper?

Definition 4.4. (Charakteristik)
Sei K ein Körper, definiere

$$\text{Char }(K) := \begin{cases} \text{die kleinste natürliche Zahl } (n \geq 2) \text{ wofür} \\ \underbrace{1 + 1 + \ldots + 1 = 0}_{n\text{-mal}} \qquad \text{falls existiert} \\ 0 \text{ sonst} \end{cases}$$

(Bezeichnung: $\underbrace{1 + \ldots + 1}_{n\text{-mal}} := n.1$.)

I.e Char $(K) = 0$ falls $\underbrace{1 + 1 + \ldots + 1}_{n\text{-mal}} \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Lemma 4.5.
Char $(K) \neq 0 \;\Rightarrow\;$ Char $(K) = p$ eine Primzahl.

Beweis
Setze $n =$ Char (K).
n nicht prim $\Rightarrow n = n_1 n_2$ mit $1 < n_i < n$ für $i = 1, 2$.

Also $0 = \underbrace{1 + 1 + \ldots + 1}_{n_1 n_2 \text{mal}} = \underbrace{(1 + \ldots + 1)}_{n_1\text{-mal}} \underbrace{(1 + \ldots + 1)}_{n_2\text{-mal}} = 0.$

Also $\underbrace{1 + \ldots + 1}_{n_1\text{-mal}} = 0$ oder $\underbrace{1 + \ldots + 1}_{n_2\text{-mal}} = 0$ - Widerspruch. □

Beispiel 4.6.
Char $(\mathbb{F}_p) = p$
Char $(\mathbb{Q}) =$ Char $(\mathbb{R}) = 0$
[weil $1 > 0$
also $1 + 1 > 0 + 1 = 1 > 0$
$\vdots$
$\underbrace{1 + 1 + \ldots + 1}_{n+1 \text{mal}} = \underbrace{(1 + \ldots + 1)}_{n \text{mal}} + 1 > \underbrace{(1 + \ldots + 1)}_{n \text{mal}} > 0$]

Definition 4.7. und Bemerkung
$k \subseteq K$ ist ein *Teilkörper*, falls $0, 1 \in k$,
k abgeschlossen unter $x + y, xy, -x, x^{-1}$ für $x \neq 0$.
Bemerke: Char $(k) =$ Char (K).

Lemma 4.8.

$$K \text{ endlich} \Rightarrow \begin{cases} (1) \quad \text{Char } (K) = p \neq 0, & p \text{ Primzahl} \qquad \text{und} \\ (2) \quad \mid K \mid = p^l & \text{für geeignete } l \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Beweis

(1) Wir zeigen die Kontraposition: Char $(K) = 0 \;\Rightarrow\; K$ unendlich.
Wir behaupten: $n_1, n_2 \in \mathbb{N},\; n_1 \neq n_2 \;\Rightarrow$
$\underbrace{1 + \ldots + 1}_{n_1} \neq \underbrace{1 + \ldots + 1}_{n_2}$.
Ohne Einschränkung (OE) $n_1 > n_2; (n_1 - n_2) > 0$
$\underbrace{(1 + \ldots + 1)}_{n_1} - \underbrace{(1 + \ldots + 1)}_{n_2} = \underbrace{(1 + \ldots + 1)}_{n_1 - n_2} = 0 -$ Widerspruch. □

(2) Dafür brauchen wir lineare Algebra! Also später! (Basis und Dimension)

Beispiel 4.9.
$K = \mathbb{F}_p(t)$ ist der Körper der rationalen Funktionen über dem endlichen Körper $\mathbb{F}_p$.
K unendlich; aber Char $(K) = p \neq 0$. Dafür brauchen wir Polynomringe. Später!

Bemerkung 4.10.
Also K unendlich $\not\Rightarrow$ Char $(K) = 0$.

Kapitel 1: § 2 Lineare Gleichungssysteme

Definition 4.11.

(i) Sei $n \in \mathbb{N}$, und K ein Körper. Eine *lineare Gleichung über* K in den Variablen $x_1, \ldots, x_n$ und Koeffizienten in K ist eine Gleichung der Form:
$a_1x_1 + \ldots, +a_nx_n = b \qquad (*)$
wobei $a_1, \ldots, a_n, b \in K$.

Terminologie
a_i ist der Koeffizient der Variablen x_i.

(ii) Ein n-Tupel $c := (c_1, \ldots, c_n) \in K^n$ ist *eine Lösung* der Gleichung $(*)$, falls die Identität $a_1c_1 + \ldots + a_nc_n = b$ gilt in K.

Beispiel 4.12.

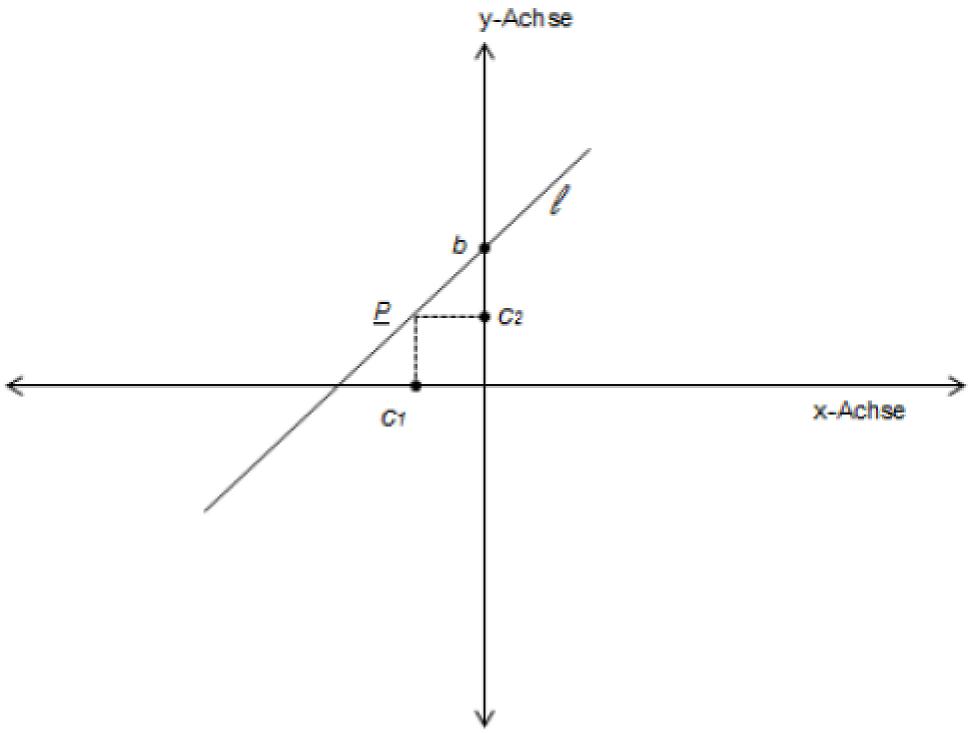
a) $\sqrt{2}x_1 + \pi x_2 = e$ ist eine l. G. über $\mathbb{R}$.

b) $2\sqrt{x_1} + \pi x_2^2 = e$ ist keine l.G. über $\mathbb{R}$.

c) Linie: $y = ax + b$ ist die Gleichung ($a, b \in \mathbb{R}, a :=$ Steigung; $b := y$ - intersect) einer Geraden (in der Ebene $\mathbb{R}^2$) : l.

Umschreiben: $x_2 - ax_1 = b$.

Lösung:
$\underline{P}$: Punkt in $\mathbb{R}^2$; $\underline{P} = \underline{P}(c_1, c_2)$ mit Koordinaten c_1 und c_2 ist eine Lösung gdw $\underline{P} \in l$, d.h. $\underline{P}$ liegt auf l.



5 Script zur Vorlesung: Lineare Algebra I

Prof. Dr. Salma Kuhlmann

Definition 5.1.

(i) Seien $m, n \in \mathbb{N}$. Ein *lineares Gleichungssystem* mit m Gleichungen und n Variablen über K ist:

$$(S)\quad \left.\begin{array}{lclcl} a_{11}x_1 & +\ldots+ & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & +\ldots+ & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & +\ldots+ & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}\right\} \quad \begin{array}{lcl} G_1 & = & b_1 \\ G_2 & = & b_2 \\ & \vdots & \\ G_m & = & b_m \end{array}$$

(ii) Eine *Lösung für (S)* ist $\underline{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in K^n$ ein n-Tupel, so dass $\underline{x}$ eine (simultane) Lösung für alle Gleichungen in (S) ist.

Notation
$L(S) := \{\underline{x} \in K^n; \underline{x} \text{ ist Lösung }\}$
$L(S)$: die Lösungsmenge.

Ziel: Finde und beschreibe $L(S)$.

(iii) (S) ist *homogen*, falls $b_i = 0$ für alle $i = 1, \ldots, m$.

(iv) (S) ist *konsistent*, falls $L(S) \neq \emptyset$.
(S) ist ansonsten *inkonsistent* ($L(S) = \emptyset$).

(v) (S) homogen $\Rightarrow \underline{x} = \underline{0} := (0, \ldots, 0) \in L(S)$ (die *triviale Lösung*). Also insbesondere (S) homogen $\Rightarrow (S)$ konsistent.

Beispiel 5.2.
3 Gleichungen in 3 Variablen über $\mathbb{R}$

$$(S_1)\left\{\begin{array}{ccccccc} 0x_1 & + & 0x_2 & + & 2x_3 & = & 6 \\ 2x_1 & + & 2x_2 & + & 0x_3 & = & 4 \\ x_1 & + & 0x_2 & + & 0x_3 & = & 1 \end{array}\right.$$

(Typ 1 - elementare Umformung)
Vertauschen der ersten mit der dritten Gleichung ergibt

$$\left\{\begin{array}{llcl} x_1 & & = & 1 \\ 2x_1 + 2x_2 & & = & 4 \\ & 2x_3 & = & 6 \end{array}\right.$$

(Typ 3 - elementare Umformung)
Addition des (-2)-fachen der ersten Gleichung zur zweiten:

$$\left\{\begin{array}{llllcl} x_1 & & & & = & 1 \\ & 2x_2 & & & = & 2 \\ & & & 2x_3 & = & 6 \end{array}\right.$$

(Typ 2 - elementare Umformung)
Multiplikation der Zweiten und der dritten Gleichung mit 1/2 ergibt schließlich:

$$(S_2)\begin{cases} x_1 & & & = & 1 \\ & x_2 & & = & 1 \\ & & x_3 & = & 3 \end{cases}$$

Damit ist $(1,1,3)$ eine Lösung (prüfe durch Einsetzen).

Ist $L(S_1) = \{(1,1,3)\}$?
Die Frage ist, ob man durch die Umformung obiger Gleichungen keine Lösungen verloren hat. Wir wollen zeigen, dass die Lösungsmenge unter den elementaren Gleichungsumformungen invariant ist. Wir untersuchen sie nun.

Typ 1:
Vertauschen

$$(S_1)\left.\begin{matrix} G_1 & = & b_1 \\ & \vdots & \\ G_i & = & b_i \\ & \updownarrow & \\ G_j & = & b_j \\ G_m & = & b_m \end{matrix}\right\} \xrightarrow{Typ\ 1} \left.\begin{matrix} & \vdots & \\ & \vdots & \\ G_j & = & b_j \\ & \vdots & \\ G_i & = & b_i \\ & \vdots & \end{matrix}\right\} (S_2)$$

Bemerkung 5.3.
(i) $(S_2) \xrightarrow{Typ\ 1} (S_1)$

(ii) $\underline{x}$ Lösung von $(S_1) \Rightarrow \underline{x}$ Lösung von (S_2)

Typ 2:
Multiplizieren einer Gleichung mit $\lambda \in K^\times$

$$(S_1)\left\{\begin{matrix} G_1 & = & b_1 \\ & \vdots & \\ G_i & = & b_i \\ & \vdots & \\ G_m & = & b_m \end{matrix}\right. \xrightarrow{Typ\ 2} \left.\begin{matrix} G_1 & = & b_1 \\ & \vdots & \\ \lambda G_i & = & \lambda b_i \\ & \vdots & \\ G_m & = & b_m \end{matrix}\right\} (S_2)$$

Bemerkung 5.4.
(i) $(S_2) \xrightarrow{Typ\ 2} (S_1)$ (Multiplikation durch λ^{-1})

(ii) $G_i = b_i \Rightarrow \lambda G_i = \lambda b_i$ (folgt aus Körperaxiome), also
$\underline{x}$ Lösung von $(S_1) \Rightarrow \underline{x}$ Lösung von (S_2)

Typ 3:
Addieren des λ-fachen der i-ten Gleichung zur j-ten Gleichung
$i \neq j; \lambda \in K$

$$(S_1)\left\{\begin{array}{ccc} G_1 & = & b_1 \\ & \vdots & \\ G_i & = & b_i \\ & \vdots & \\ G_j & = & b_j \\ & \vdots & \\ G_m & = & b_m \end{array}\right. \xrightarrow{Typ\ 3} \left.\begin{array}{ccc} G_1 & = & b \\ & \vdots & \\ G_i & = & b_i \\ & \vdots & \\ \lambda G_i + G_j & = & \lambda b_i + b_j \\ & \vdots & \\ G_m & = & b_m \end{array}\right\}(S_2)$$

Bemerkung 5.5.

(i) $(S_2) \xrightarrow{Typ\ 3} (S_1)$
(Addition $(-\lambda)$-fach der i-ten Gleichung zur j-ten)

(ii) $G_i = b_i \Rightarrow \lambda G_i = \lambda b_i$ und addiere $G_j = b_j$
also (Körperaxiome) $\lambda G_i + G_j = \lambda b_i + b_j$.
Also $\underline{x}$ Lösung von $(S_1) \Rightarrow \underline{x}$ Lösung von (S_2)

Definition 5.6.
(S_2) ist *äquivalent* zu (S_1), falls man (S_2) aus (S_1) durch endlich viele elementare Gleichungsumformungen erhält.

Bemerkung 5.7.
Durch Bemerkung 5.3 (i), 5.4 (i) und 5.5 (i) bekommt man sofort:
(S_2) äquivalent $(S_1) \Rightarrow (S_1)$ äquivalent (S_2).
Also sagen wir: (S_1) *und* (S_2) *sind äquivalent.*

Satz 5.8.
Äquivalente Systeme haben die gleiche Lösungsmenge.

Beweis
Aus Bemerkung 5.3 (ii), 5.4 (ii) und 5.5 (ii) haben wir:
$L(S_1) \subseteq L(S_2)$.
Aus Bemerkung 5.3 (i), 5.4 (i) und 5.5 (i) bekommt man nun umgekehrt
$L(S_2) \subseteq L(S_1)$. Also $L(S_1) = L(S_2)$. □

Bemerkung 5.9.
Wir werden die Umkehrung vom Satz später studieren!

Also wollen wir die Gleichung umformen, um "einfachere" Systeme zu bekommen. Wir müssen den Begriff "einfacher" formalisieren. Dafür führen wir nun Matrizen ein.

Kapitel 1: § 3 Matrizen

Definition 5.10.
Seien $m, n \in \mathbb{N}$. Eine $m \times n$ Matrix über K ist eine Familie in K der Gestalt

$$A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$$

wobei $a_{ij} \in K$ für alle i, j.

Darstellung

(i)

$$\begin{array}{ccc} & S_j := j\text{-te Spalte} & \\ m\text{-Zeilen} \Rightarrow & \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} & \leftarrow R_i := i\text{-te Zeile} \\ & \Uparrow n\text{-Spalten} & \end{array}$$

(ii) Die *Koeffizientenmatrix* zum System (S) ist

$$A(S) := \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

und die *erweiterte Koeffizientenmatrix* ist

$$(A, B) := \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

Matrix-Darstellung von (S) ist: $AX = B$, wobei

$$X := \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

(Eine $n \times 1$ Matrix mit Variablen als Koeffizienten.)

und

$$B := \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

(Eine $m \times 1$-Matrix über K.)

(iii) Die *elementaren Zeilenumformungen* von Typ 1, Typ 2 und Typ 3 entsprechen genau den elementaren Gleichungsumformungen.

(iv) Seien A, B $m \times n$ Matrizen. A und B sind *Zeilenäquivalent*, falls man B aus A durch endlich viele Zeilenumformungen erhält (und / oder umgekehrt).
Das ist das Matrix-Analogon von Definition 5.6 für Systeme.

Satz 5.11.
(Matrix-Analogon von Satz 5.8)
Bei elementaren Zeilenumformungen (auf die erweiterte Koeffizientenmatrix) ändert sich die Lösungsmenge des linearen Gleichungssytems nicht.

Nun wollen wir endlich beschreiben, was wir mit "einfacher" meinen.

Definition 5.12.
Eine $m \times n$-Matrix A ist in *reduzierter Zeilenform* (Abkürzung: r.Z.F) falls

(a) der erste Koeffizient, der von Null verschieden ist, ist 1 in einer Zeile $R_i \not\equiv 0$.
(Dieser erste Koeffizient verschieden von Null heißt *Hauptkoeffizient* bzw. *Haupteins.*
Bedeutung von $R_i \equiv 0$: eine Zeile der Matirx heißt *Nullzeile*, falls alle Koeffizienten, die darin vorkommen, gleich Null sind.

(b) Jede Spalte von A, in der sich eine Haupteins befindet, hat alle anderen Koeffizienten gleich Null.

Beispiel 5.13.
(Matrix-Form): Erweiterte Matrix von (S_1):

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 2 & 6 \\ 2 & 2 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \textbf{ nicht} \text{ in r.Z.F.}$$

Erweiterte Matrix von (S_2) dagegen:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

6 Script zur Vorlesung: Lineare Algebra I

Prof. Dr. Salma Kuhlmann

Beispiel 6.1.

(i) Die Identitätsmatrix oder *Einheitsmatrix* (quadratische Matrix) I_n wird so definiert:

$$(I)_{ij} = \underbrace{\delta_{ij}}_{\text{Kronecker Delta}} := \begin{cases} 1 & \text{für } i = j \\ 0 & \text{für } i \neq j \end{cases}$$

I_n ist in r.Z.F.

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & 1 & & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(ii)
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

sind **nicht** in r.Z.F.

(iii) Die $0^{m \times n}$-Matrix ($0_{ij} = 0$ für alle $i = 1, \ldots, m$ und $j = 1, \ldots, n$) ist in r.Z.F.

Definition 6.2.
Eine $m \times n$-Matrix A ist in einer *(reduzierten) Zeilenstufenform* (r.Z.S.F.), falls die folgenden Eigenschaften erfüllt sind:

(a) Axiom (a) für r.Z.F.

(b) Axiom (b) für r.Z.F.

(c) jede Nullzeile erscheint (falls vorhanden) nach jeder ungleich Nullzeile.

(d) Seien $Z_1, \ldots, Z_r$ die ungleich Nullzeilen ($r \leq m$) und k_i der Spaltenindex, in der die Haupteins der i-ten Zeile erscheint ($i = 1, \ldots, r$), dann gilt $k_1 < k_2 < \cdots < k_r$.

Satz 6.3.
Jede $m \times n$-Matrix A ist zeilenäquivalent zu einer Matrix B in r.Z.S.F.

Beweis siehe unten

Zweck: Aus der r.Z.S.F. kann man $L(S)$ sofort ablesen.

Beispiel 6.4.
Über $\mathbb{Q}$: Erweiterte Koeff-M:

(i) $$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{array}{ccccc} x_1 & & & = & 4 \\ & x_2 & & = & 7 \\ & & x_3 & = & -1 \end{array}$$

(ii) $$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \leftarrow \text{inkonsistent.}$$

(iii) $$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 2 \end{array}\right)$$

x_1, x_2, x_3 *Hauptvariablen*; x_4 *freie* Variable.

$$\begin{array}{ccccccc|ccccccc} x_1 & & & + & 4x_4 & = & -1 & & x_1 & = & -1 & - & 4x_4 \\ & x_2 & & + & 2x_4 & = & 6 & \Rightarrow & x_2 & = & 6 & - & 2x_4 \\ & & x_3 & + & 3x_4 & = & 2 & & x_3 & = & 2 & - & 3x_4 \end{array}$$

$x_4 = q \in \mathbb{Q}$ also $L(S) = \{(-1-4q, 6-2q, 2-3q, q) \in \mathbb{Q}^4 \mid q \in \mathbb{Q}\}$

Beweis von Satz 6.3:
Falls $A = 0^{m\times n}$, dann ist A bereits in r.Z.S.F. Ansonsten:

Typ 1 Bei wiederholter Anwendung von Typ 1 können wir Œ annehmen, dass die Zeilen $Z_1, Z_2, \ldots, Z_r$ nicht Null sind ($r \leq m$)
und $Z_{r+1}, \ldots, Z_m$ Null sind (wobei $r = m$ vorkommen kann!).

Wir betrachten Z_1:
Sei $0 \neq a_{1k_1}$ der Hauptkoeffizient von Z_1 ($1 \leq k_1 \leq n$).

Typ 2 Multipliziere Z_1, durch $a_{1k_1}^{-1}$ und dann für jede $2 \leq i \leq r$:

Typ 3 Addiere $(-a_{ik_1})$-fach von (der neu erhaltenen Zeile) Z_1 zur i-ten Zeile.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{c} \text{Spalte } k_1 \\ \downarrow \end{array} \\ \begin{array}{c} Z_1 \\ \\ \\ \\ \\ Z_r \\ \\ \\ \\ \end{array} & \left(\begin{array}{cccccccc} 0 & \cdots & 0 & 1 & * & \cdots & \cdots & * \\ & & & 0 & & & & \\ & & & \vdots & & & & \\ & & & 0 & & & & \\ & & & \vdots & & & & \\ - & - & - & - & - & - & - & - \\ 0 & \cdots & \cdots & & & \cdots & \cdots & 0 \\ & & & \vdots & & & & \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & & \cdots & \cdots & 0 \end{array}\right) := A_1 \end{array}$$

Nun betrachte Z_2 der Matrix A_1. Wieder

Typ 1 Œ $Z_2 \not\equiv 0$.

Sei $a_{2k_2} \neq 0$ Hauptkoeffizient von Z_2. Bemerke: $k_2 \neq k_1$. Also haben wir

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 & & \cdots & 1 & * & \cdots & * \\ 0 & \cdots & 0 & a_{2k_2} & 0 & \cdots & 0 & * & \cdots & * \\ & & & & & & \vdots & & & \\ & & & & & & \vdots & & & \\ & & & & & & 0 & & & \end{pmatrix} = A_1 \text{ (Fall 1) } (k_2 < k_1)$$

oder

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & * & \cdots & & * & \cdots & * \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & & \cdots & & a_{2k_2} & \cdots & * \\ & & & & & & 0 & & & \\ & & & & & & \vdots & & & \\ & & & & & & 0 & & & \end{pmatrix} = A_1 \text{ (Fall 2) } (k_1 < k_2)$$

Typ 2 Wiederhole: Multipliziere Z_2 durch $a_{2k_2}^{-1}$, dann

Typ 3 Im Fall 1 ($k_2 < k_1$): Addiere $(-a_{ik_2})$-fach von Z_2 zur i-ten Zeile für $3 \leq i \leq m$.

Typ 3 Im Fall 2 ($k_1 < k_2$): Addiere $(-a_{ik_2})$-fach von Z_2 zur i-ten Zeile für $i = 1$ und $3 \leq i \leq m$.

Achtung
Wichtig ist es zu bemerken, dass wir die Koeffizienten
$a_{1j} = 0 \quad j = 1, \ldots, k_1 - 1$ und
$a_{1k_1} = 1$ und
$a_{ik_1} = 0 \quad i = 2, \ldots, m$ von A_1 in beiden Fällen $k_2 < k_1$ oder $k_1 < k_2$ nicht geändert haben !

Per Induktion wiederholen wir diese Prozedur für $i = 3, \ldots, r$. Wir erhalten eine Matrix A_r, die nun (a), (b), (c) genügt. Schließlich erhalten wir bei wiederholter Anwendung von Typ 1 eine Matrix B, die auch (d) genügt, also B ist in r.z.S.F. $\square$

Kapitel 1: § 4 Homogene Systeme

Beispiel 6.5.
Sei R folgende Matrix (über $\mathbb{Q}$)

$$R = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{array} \end{array}$$

finde $L(S)$, wobei (S) das homogene System $RX = 0$ ist.

Lösung
R ist in r.Z.S.F. Beobachte: $r :=$ Anzahl der $\not\equiv 0$-Zeilen $= 2 =$ Anzahl Hauptvariable.

$$(S) \quad \begin{array}{rcl} x_2 - 3x_3 \qquad + \frac{1}{2}x_5 & = & 0 \\ x_4 + 2x_5 & = & 0 \end{array}$$

Also $\quad x_2 = 3x_3 - \frac{1}{2}x_5$
$\quad x_4 = \quad -2x_5$
$\quad x_1, x_3, x_5$ freie Variable. Setze $x_1 = a, x_3 = b, x_5 = c$.

Also $\quad L(S) = \{(a, 3b - \frac{1}{2}c, b, -2c, c) \in \mathbb{Q}^5 \mid a, b, c \in \mathbb{Q}\}$.

Bemerke
x_1 freie Variable. Setze $a = 1, b = c = 0$. dann ist $(1, 0, 0, 0, 0)$ eine nicht-triviale Lösung.

7 Script zur Vorlesung: Lineare Algebra I

Prof. Dr. Salma Kuhlmann

Korollar 7.1.
Sei R eine $m \times n$-Matrix in r.Z.S.F und setze $r :=$ die Anzahl der $\not\equiv 0$-Zeilen von R.
Falls $r < n$, dann hat das homogene System

$$RX = 0 \ (*)$$

nicht triviale Lösungen.

Beweis
$r =$ Anzahl der $\not\equiv 0$-Zeilen in r.Z.S. F.
$\quad =$ Anzahl der Haupteins
$\quad =$ Anzahl der Hauptvariablen.

Also $n - r =$ Anzahl der freien Variablen und $r < n \Rightarrow n - r \neq 0 \Rightarrow$ es existiert mindestens eine freie Variable x_j. Wir erhalten eine nicht triviale Lösung für $(*)$, indem wir z.B. $x_j = 1$ setzen. $\square$

Korollar 7.2.
Sei A eine (beliebige) $m \times n$-Matrix mit $m < n$. Dann hat das homogene System

$$(S) \qquad AX = 0$$

nicht triviale Lösungen.

Beweis
Sei R in r.Z.S.F zeilenäquivalent zu A. (R ist immer noch eine $m \times n$-Matrix.) Setze $r :=$ Anzahl der $\not\equiv 0$-Zeilen von R.
Also $r \leq m < n$. Also hat

$$RX = 0 \qquad (*)$$

nach Korollar 7.1 nicht triviale Lösungen und damit auch (S). $\square$

Bemerkung 7.3.
Sei R eine $n \times n$-Matrix in r.Z.S.F und *ohne Nullzeilen* (also jede Zeile hat eine Haupteins). Dann ist $R = I_n$.

Beweis
r.Z.S.F $\Rightarrow \quad 1 \leq k_1 < k_2 < \cdots < k_n \leq n$, wobei k_j die Spalte ist, in der die Haupteins der Zeile Z_j erscheint.
Also $\quad k_j = j$, für alle $j = 1, \ldots, n$.
Also $\quad a_{jj} = 1$, für alle $j = 1, \ldots, n$.
Sei $i \neq j$, dann ist a_{ij} in der k_j-Spalte
$\xrightarrow{r.Z.S.F} a_{ij} = 0$ (weil $a_{ij} \neq a_{jj}$). $\square$

Korollar 7.4.
Sei A eine $n \times n$-Matrix. Es gilt:
A zeilenäquivalent zu $I_n \;\Leftrightarrow\; AX = 0$ hat nur die triviale Lösung.

Beweis
"$\Rightarrow$" klar, weil $I_n X = 0$ nur die triviale Lösung hat.
"$\Leftarrow$" Sei R eine $n \times n$-Matrix in r.Z.S.F und zeilenäquivalent zu A. Sei $r :=$ Anzahl der $\not\equiv 0$-Zeilen von R. Korollar 7.2 $\Rightarrow r \geq n$. Andererseits $r \leq n$. Also $r = n$. Also hat R keine Nullzeilen $\Rightarrow R = I_n$. $\square$

Kapitel 1: § 5 Matrix-Multiplikation

Definition 7.5.
Seien A eine $\boldsymbol{m} \times n$- und B eine $n \times \boldsymbol{p}$-Matrix über K.
Wir definieren eine neue Matrix $C := AB$; das Produkt als die folgende $\boldsymbol{m} \times \boldsymbol{p}$-Matrix:

$$C_{ij} := \sum_{r=1}^{n} A_{i\mathbf{r}} B_{\mathbf{r}j}.$$

Also Zeilen mal Spalten!

Beispiel 7.6.

(1)
$$\underset{m \times n}{\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}} \underset{n \times 1}{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}} = \underset{m \times 1}{\begin{pmatrix} a_{11} & x_1 & + & \cdots & + & a_{1n} & x_n \\ a_{21} & x_1 & + & \cdots & + & a_{2n} & x_n \\ \vdots & & & & & & \\ a_{m1} & x_1 & + & \cdots & + & a_{mn} & x_n \end{pmatrix}}$$

(2)
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} + 0 + 0 & a_{12} + 0 + 0 & a_{13} + 0 + 0 \\ 0 + a_{21} + 0 & 0 + a_{22} + 0 & 0 + a_{23} + 0 \\ 0 + 0 + a_{31} & 0 + 0 + a_{32} & 0 + 0 + a_{33} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

(3) **Allgemeiner:** Sei A eine $n \times n$-Matrix. Es gilt $C = AI_n = I_nA = A$.
Beweis: Wir zeigen $AI_n = A$. (I_nA wird analog behandelt.)

$(AI_n)_{ij} = \sum_{r=1}^{n} A_{ir}(I_n)_{rj} \qquad (*)$

$$\left.\begin{array}{lll} \text{Fall 1} & r \neq j & (I_n)_{rj} = 0 \\ \text{Fall 2} & r = j & (I_n)_{rj} = 1 \end{array}\right\} \text{in } (*) \text{ eingesetzt ergibt die Summe}$$

$\sum_{r=1}^{n} A_{ir}(I_n)_{rj} = A_{ij}(I_n)_{jj} = A_{ij}$ $\square$

(4) Über $\mathbb{F}_7$:
$$\underset{2 \times 2}{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}} \underset{2 \times 2}{\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} (1 \bullet_7 5) + (2 \bullet_7 0) & (1 \bullet_7 6) + (2 \bullet_7 1) \\ (3 \bullet_7 5) + (4 \bullet_7 0) & (3 \bullet_7 6) + (4 \bullet_7 1) \end{pmatrix} =$$

$$\underset{2 \times 2}{\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}$$

(5) Die j-te Spalte von AB (als $m \times 1$-Matrix) $= \underbrace{A}_{m \times n}$ [j-te Spalte von B] (als $n \times 1$-Matrix).

und:
Die i-te Zeile von AB (als $1 \times p$-Matrix) $=$ (als $1 \times n$-Matrix) [i-te Zeile von A] $\underbrace{B}_{n \times p}$.

Satz 7.7.
Seien A, B, C Matrizen über K, so dass die Produkte BC und $A(BC)$ definiert sind, dann sind auch die Produkte AB und $(AB)C$ definiert und es gilt:

$$A(BC) = (AB)C.$$

Beweis
Sei B eine $n \times p$-Matrix. Also hat C p Zeilen und BC n Zeilen. Also (weil $A(BC)$ definiert ist) Œ ist A eine $m \times n$-Matrix. Also ist AB eine wohldefinierte $m \times p$-Matrix und $(AB)C$ ist damit auch wohldefiniert.

Wir wollen nun zeigen, dass die zwei Matrizen $A(BC)$ und $(AB)C$ gleich sind. Dafür müssen wir zeigen, dass alle ihre Koeffizienten gleich sind.

Wir berechnen also:

$$\begin{array}{rcl}
[A(BC)]_{ij} & = & \sum_r A_{ir} \, (BC)_{rj} \\
& = & \sum_r A_{ir} \, (\sum_s B_{rs} \, C_{sj}) \\
& = & \sum_r \sum_s A_{ir} \, B_{rs} \, C_{sj} \text{ (Distributivität und Assoziativität in } K\text{)} \\
& = & \sum_s \sum_r A_{ir} \, B_{rs} \, C_{sj} \text{ (Kommutativität und Assoziativität in } K\text{)} \\
& = & \sum_s (\sum_r A_{ir} \, B_{rs}) \, C_{sj} \\
& = & \sum_s (AB)_{is} \, C_{sj} \\
& = & [(AB)C]_{ij}.
\end{array}$$

□

Bezeichnung 7.8.
Seien A eine $n \times n$-Matrix und $k \in \mathbb{N}$.
$A^k := \underbrace{A \cdots A}_{k\text{-mal}}$ (wohldefiniert).

8 Script zur Vorlesung: Lineare Algebra I

Prof. Dr. Salma Kuhlmann

Kapitel 1: § 6 Elementare Matrizen

Notation:
Sei e eine elementare Zeilenumformung auf eine $m \times n$-Matrix A. Mit $e(A)$ bezeichnet man die $m \times n$-Matrix, die wir nun erhalten.

Untersuchung:
Typ 1: Umtauschen von Zeilen Z_r und Z_s von A:
$$e(A)_{ij} = \begin{cases} A_{ij} & \text{für} \quad i \neq r, i \neq s \\ A_{sj} & \text{für} \quad i = r \\ A_{rj} & \text{für} \quad i = s \end{cases}$$

Typ 2: Multiplizieren Z_r durch Skalar $c \neq 0; c \in K$:
$$e(A)_{ij} = \begin{cases} A_{ij} & \text{für} \quad i \neq r \\ cA_{rj} & \text{für} \quad i = r \end{cases}$$

Typ 3: Ersetzen von Z_r durch $Z_r + cZ_s, c \in K; r \neq s$:
$$e(A)_{ij} = \begin{cases} A_{ij} & \text{für} \quad i \neq r \\ A_{rj} + cA_{sj} & \text{für} \quad i = r \end{cases}$$

Definition 8.1.
Eine $m \times m$-Matrix in der Form $e(I_m)$ ist *elementar.*

Beispiel 8.2.
Die 2×2 elementaren Matrizen über K:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \textit{Typ } 1$$

$$\begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix} \qquad \textit{Typ } 2, c \neq 0, c \in K$$

$$\begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix} \qquad \textit{Typ } 3, c \in K$$

Satz 8.3.
Sei e eine elementare Zeilenumformung und E die elementare Matrix $E := e(I_m)$ und sei A eine $m \times n$-Matrix über K. Es gilt: $e(A) = EA$.

Beweis:
***e* ist vom Typ 1:** $r \neq s$
Die Untersuchung ergibt:

(i) $E_{ik} = \delta_{ik}$ für $i \neq r, i \neq s$ und
(ii) $E_{rk} = \delta_{sk}$ für $i = r$ und
(iii) $E_{sk} = \delta_{rk}$ für $i = s$

Wir berechnen nun: $(EA)_{ij} = \sum_{k=1}^{m} E_{ik}\ A_{kj}$

Fall (i): $i \neq r; i \neq s$

$$\begin{aligned} (EA)_{ij} &= \sum_{k=1}^{m} \delta_{ik}\ A_{kj} \\ &= \delta_{ii}\ A_{ij} = A_{ij} \end{aligned}$$

Fall (ii): $i = r$

$$\begin{aligned} (EA)_{ij} &= \sum_{k=1}^{m} E_{rk} A_{kj} \\ &= \sum_{k=1}^{m} \delta_{sk}\ A_{kj} = \delta_{ss}\ A_{sj} = A_{sj} \end{aligned}$$

Fall (iii): $i = s$

$$\begin{aligned} (EA)_{ij} &= \sum_{k=1}^{m} E_{sk} A_{kj} \\ &= \sum_{k=1}^{m} \delta_{rk}\ A_{kj} = \delta_{rr}\ A_{rj} = A_{rj} \end{aligned}$$

□

***e* ist vom Typ 2:** ÜA.

***e* ist vom Typ 3:** $r \neq s$

$$E_{ik} = \begin{cases} \delta_{ik} & \text{für } i \neq r \\ \delta_{rk} + c\delta_{sk} & \text{für } i = r \end{cases}$$

Wir berechnen nun: $(EA)_{ij} = \sum_{k=1}^{m} E_{ik}\ A_{kj}$

Fall 1
$i \neq r$

$(EA)_{ij} = \sum_{k=1}^{m} E_{ik}\ A_{kj} = \sum_{k=1}^{m} \delta_{ik}\ A_{kj} = \delta_{ii}\ A_{ij} = A_{ij}$

Fall 2
$i = r$

$(EA)_{ij} = \sum_{k=1}^{m} E_{rk}\ A_{kj} = \sum_{k=1}^{m} (\delta_{rk} + c\delta_{sk}) A_{kj}$

Hier bekommen wir nur zwei Terme (die möglichwerweise ungleich Null sind) und zwar nur für
• $k = r$ oder • $k = s$.

$k = r \Rightarrow$ Also $k \neq s$; also $c\delta_{sk} = 0$; also $(\delta_{rk} + c\delta_{sk}) A_{kj} = (\delta_{rr} + 0) A_{rj} = A_{rj}$.

$k = s \Rightarrow$ Also $k \neq r$; also $\delta_{rk} = 0$; also $(\delta_{rk} + c\delta_{sk}) A_{kj} = (0 + c\delta_{ss}) A_{sj} = cA_{sj}$.

Insgesamt $\sum_{k=1}^{m} E_{rk}\ A_{kj} = \begin{cases} A_{ij} & \text{für } i \neq r \\ A_{rj} + cA_{sj} & \text{für } i = r \end{cases}$.

□

9 Script zur Vorlesung: Lineare Algebra I

Prof. Dr. Salma Kuhlmann

Korollar 9.1.
Seien A und B $m \times n$-Matrizen über K. Es gilt: B ist zu A zeilenäquivalent gdw $B = PA$, wobei P das Produkt von $m \times m$-elementaren Matrizen ist.

Beweis

"$\Leftarrow$" Sei $P = E_\ell \dots E_2 E_1$, wobei E_t eine elementare $m \times m$-Matrix ist.
Also ist $E_1 A$ zeilenäquivalent zu A
und $E_2(E_1 A)$ ist zeilenäquivalent zu $E_1 A$.
Also ist $E_2 E_1 A$ zeilenäquivalent zu A.
So weiter fortsetzen:
$E_\ell \dots E_1 A$ ist zeilenäquivalent zu A
i.e. B ist zeilenäquivalent zu A.

"$\Rightarrow$" Sei B zeilenäquivalent zu A und seien $e_1, \cdots, e_\ell$ die elementaren Zeilenumformungen mit $A \overset{e_1}{\to} \cdots \overset{e_\ell}{\to} B$.
Also $E_\ell \cdots E_2 E_1 A = B$,
wobei E_t die elementare Matrix $e_t(I_m)$ für $t = 1, \dots, \ell$ ist.
Setze $P := E_\ell \cdots E_2 E_1$. □

Definition 9.2.
Eine $n \times n$-*Matrix* A *ist invertierbar*, falls es eine $n \times n$-Matrix B gibt, so dass

$$AB = I_n \text{ und } BA = I_n.$$

In diesem Fall heißt B eine *Inverse von* A.

Proposition 9.3.
Sei A invertierbar. Dann gibt es eine eindeutige Inverse.

Beweis
Seien B_1, B_2 beide Inverse von A. Es gilt:

$$\begin{array}{rrcll} & AB_1 & = & I_n = AB_2 & \\ \text{also} & B_2(AB_1) & = & B_2(AB_2) & \text{(Multiplikation)} \\ \text{also} & (B_2A)B_1 & = & (B_2A)B_2 & \\ \text{also} & I_nB_1 & = & I_nB_2, & \text{i.e. } B_1 = B_2 \quad \square \end{array}$$

Notation
Wir bezeichnen mit A^{-1} die eindeutige Inverse der invertierbaren Matrix A.

Proposition 9.4.
Seien A, B $n \times n$-Matrizen über K. Es gilt
(i) Wenn A invertierbar, so auch A^{-1} und $(A^{-1})^{-1} = A$.
(ii) Wenn A und B beide invertierbar, so auch AB und $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Beweis
(i) Wir berechnen $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$. Also ist A die Inverse von A^{-1}.
(ii) Wir berechnen $B^{-1}A^{-1}(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}I_nB = B^{-1}B \equiv I_n$.
Analog $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = I_n$. □

Korollar 9.5.
Seien $A_1, \ldots, A_\ell$ $n\times n$ -invertierbare Matrizen, dann ist das Produkt $A_1 \cdots A_\ell$ auch invertierbar und es gilt $(A_1 \cdots A_\ell)^{-1} = A_\ell^{-1} \cdots A_1^{-1}$ (∗)

Beweis
Induktion nach ℓ. Für $\ell = 1$ ist es klar.
Indutkionsannahme: (∗) gilt für ℓ.
Induktionsschritt: (∗) gilt für $\ell + 1$:
Beweis:

$$\begin{aligned}
&(A_1 \cdots A_\ell \; A_{\ell+1})^{-1} &&= \\
&((A_1 \cdots A_\ell) \; A_{\ell+1})^{-1} &&= \leftarrow \text{ Proposition 9.4 (ii)} \\
&A_{\ell+1}^{-1}(A_1 \cdots A_\ell)^{-1} &&= \leftarrow \text{ Induktionsannahme} \\
&A_{\ell+1}^{-1}(A_\ell^{-1} \cdots A_1^{-1}) &&= \leftarrow \text{ Assoziativität} \\
&A_{\ell+1}^{-1}A_\ell^{-1} \cdots A_1^{-1}
\end{aligned}$$

□

Proposition 9.6.
Elementare Matrizen sind invertierbar.

Beweis
Sei $E = e(I_n)$ eine elementare Matrix. Sei e^* die umgekehrte Zeilenumformung (auf die Zeilen von I_n; siehe Bemerkungen 5.3 (I), 5.4 (i) und 5.5 (i)) und $E^* := e^*(I_n)$. Wir berechnen

$$E^*E = e^*(I_n)e(I_n) = I_n \quad \text{und} \quad E^*E = EE^* = I_n$$

D.h. $E^* = E^{-1}$. □

Beispiel 9.7.
2×2-elementare Matrizen

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -c \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -c & 1 \end{pmatrix}$$

$c \neq 0$

$$\begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} c^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & c^{-1} \end{pmatrix}$$

Satz 9.8.
Sei A eine $n \times n$-Matrix. Sind äquivalent:

(i) A ist invertierbar.

(ii) $AX = b$ ist konsistent für jede $n \times 1$-Spaltenmatrix b.

(iii) $AX = 0$ hat nur die triviale Lösung.

(iv) A ist zeilenäquivalent zu I_n.

(v) A ist Produkt von elementaren Matrizen.

[(ii) und (iii): Beziehung zwischen homogener und allgemeiner (quadratischer) Systeme.]

Beweis
(i) $\Rightarrow$ (ii)
Setze $X := A^{-1}b$. Es gilt $AX = A(A^{-1}b) = (AA^{-1})b = I_n b = b$.

(iii) $\Leftrightarrow$ (iv) schon bewiesen (Korollar 7.4).

(ii) $\Rightarrow$ (iii)
Wenn $AX = 0$ nicht triviale Lösungen hätte, dann ist die r.Z.S.F. R von A nicht I_n, also muss eine Nullzeile haben (siehe Bemerkung 7.3 und Korollar 7.4). Also ist zum Beispiel das System

$(S) \quad RX = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ inkonsistent.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Nun $\boxed{R = PA}$ wobei P das Produkt von elementaren Matrizen ist (Korollar 9.1). Also ist P invertierbar (Korollar 9.5 und Proposition 9.6).
Also multipliziere (S) durch P^{-1}:

$(S) \quad (PA)X = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ ist inkonsistent.

Also $P^{-1}(PA)X = P^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ ist inkonsistent.

Also $AX = \underbrace{P^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}}_{n\times 1}$ inkonsistent.

$$\underbrace{n \times n \quad n \times 1}_{n\times 1}$$

Setze $b = P^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$, wir bekommmen $AX = b$ inkonsistent. Widerspruch.

(iv) $\Rightarrow$ (v)
$A = P'I_n = P'$, wobei P' das Produkt von elementaren Matrizen ist (Korollar 9.1).

(v) $\Rightarrow$ (i)
Folgt aus Korollar 9.5 und Proposition 9.6. $\square$

Korollar 9.9.
Seien A und B $m \times n$-Matrizen. B ist zeilenäquivalent zu A genau dann, wenn $B = PA$, wobei P eine invertierbare $m \times m$-Matrix ist.

10 Script zur Vorlesung: Lineare Algebra I

Prof. Dr. Salma Kuhlmann

Korollar 10.1.
Seien A, eine $n \times n$-Matrix, invertierbar. Eine Folge von elementaren Zeilenumformungen, die A zur Identitätsmatrix I_n reduzieren, reduziert I_n zu A^{-1}.

Beweis
Die elementaren Zeilenumformungen werden durch Multiplikation (links) mit elementaren Matrizen erreicht, d.h. $E_\ell \dots E_1 A = I_n$. Aber dann gilt: $A^{-1} = E_\ell \dots E_1 = E_\ell \dots E_1 I_n$. □

Beispiel 10.2.
$(A \mid I_n) \to (I_n \mid A^{-1})$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[(-1)Z_1 + Z_3]{(-2)Z_1 + Z_2}$$

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{2Z_2 + Z_3}$$

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -5 & 2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{(-1)Z_3}$$

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow[(-3)Z_3 + Z_1]{3Z_3 + Z_2}$$

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 2 & 0 & -14 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{(-2)Z_2 + Z_1}$$

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & -40 & 16 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array}\right)$$

Kapitel 2: § 1 Vektorräume

Definition 10.3.
Sei K ein Körper, $V \neq \emptyset$ eine nichtleere Menge, versehen mit zwei Verknüpfungen

(i) Skalarmultiplikation

$$\begin{aligned} \bullet\ :\ & K \times V \to V \\ & (c, v) \mapsto cv \text{ und} \end{aligned}$$

(ii) Vektorsumme

$$\begin{aligned} +\ :\ & V \times V \to V \\ & (v_1, v_2) \mapsto v_1 + v_2 \end{aligned}$$

Das Triple $(V, \bullet, +)$ ist ein *K-Vektorraum* $(K - VR)$ oder *ein Vektorraum über* K (VR/K), falls die folgenden Axiome erfüllt sind: $(V, +)$ ist eine abelsche Gruppe und

$$\left.\begin{array}{ccc} 1 \cdot \alpha & = & \alpha \\ (c_1 c_2)\alpha & = & c_1(c_2\alpha) \\ c(\alpha_1 + \alpha_2) & = & c\alpha_1 + c\alpha_2 \\ (c_1 + c_2)\alpha & = & c_1\alpha + c_2\alpha \end{array}\right\} \begin{array}{l} \forall \alpha \in V \\ \forall c_1, c_2 \in K \\ \forall \alpha_1, \alpha_2 \in V \\ \forall c \in K \end{array}$$

Beispiel 10.4.
$V = K^n$ mit koordinatenweisen Verknüpfungen.

Beispiel 10.5.
Allgemeiner: $K^{m\times n} := Mat_{m\times n}(K) :=$ die Menge aller $m \times n$-Matrizen mit Koeffizienten aus K und Matrizensumme und skalarvielfach.

Beispiel 10.6.
Sei S eine Menge.
$V := \{f; f : S \to K; f \text{ Abbildung }\}$
$V := K^S$ mit Funktionensummen und skalarvielfach.

Beispiele 10.4 und 10.5 sind Sonderfälle von Beispiel 10.6.

Beispiel 10.7.
Der VR der Polynomialfunktionen über K
$f(x) = c_0 + c_1x^1 + \cdots + c_nx^n, c_i \in K.$

Beispiel 10.8.
$K\ /\ k$ eine Körpererweiterung.

Proposition 10.9.
Für $c \in K, \alpha \in V$

(1) $c \cdot 0 = 0$

(2) $0 \cdot \alpha = 0$

(3) $c \cdot \alpha = 0 \Rightarrow c = 0$ oder $\alpha = 0$

(4) $(-1) \cdot \alpha = -\alpha$

Definition 10.10.
Seien $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in V$; $\alpha \in V$ ist eine *lineare Kombination* (von $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$), wenn es $c_1, \ldots, c_n \in K$ gibt mit $\alpha = \sum_{i=1}^n c_i\alpha_i$.

Proposition 10.11.
$\sum c_i\alpha_i + \sum d_i\alpha_i = \sum(c_i + d_i)\alpha_i$
$c \sum c_i\alpha_i = \sum(cc_i)\alpha_i$.

11 Script zur Vorlesung: Lineare Algebra I

Prof. Dr. Salma Kuhlmann

Kapitel 2: § 2 Unterräume

Definition 11.1.
Sei V ein K-Vektorraum und $W \subseteq V$ eine Teilmenge. W ist ein *Teilraum*, falls $(W, +, \bullet)$ ein K-Vektorraum ist (mit der Einschränkung der Verknüpfung von V auf W i.e. es sollen gelten $+ : W \times W \to W$ und $\bullet : K \times W \to W$ und auch die Vektorraumaxiome).

Dazu sind nachzurechnen:

$$\begin{array}{llll} 0_V \in W; & \alpha, \beta \in W & \Rightarrow & \alpha + \beta \in W \\ & c \in K, \alpha \in W & \Rightarrow & c\alpha \in W \\ \text{(insbesondere} & \alpha \in W & \Rightarrow & -\alpha \in W) \end{array} .$$

Also gibt es ein einfaches Kriterium.

Satz 11.2.
Sei V ein K-Vektorraum, $\emptyset \neq W \subseteq V$ eine Teilmenge. Dann ist W ein Unterraum von V genau dann, wenn für alle $\alpha, \beta \in W, c \in K : \alpha + c\beta \in W$.

Beispiel 11.3.

(1) Ist V ein K-Vektorraum, so sind V und $\{0_V\}$ Unterräume von V.

(2) $V = K^n$
$W := \{(x_1, \ldots, x_n) \in K^n \ ; \ x_1 = 0\}$ ist Unterraum, aber $X := \{(x_1, \ldots, x_n) \in K^n \ ; \ x_1 = 1 + x_2\}$ nicht !
(E.g. $(0, \ldots, 0) \notin X$).

(3) Die Symmetrischen $n \times n$-Matrizen über K ($A_{ij} = A_{ji}$ für $1 \leq i, j \leq n$)
Seiten $A, B \in \mathrm{Sym}_{n\times n}(K); c \in K$, dann ist
$(A + cB)_{ij} = A_{ij} + (cB)_{ij} = A_{ij} + cB_{ij} = A_{ji} + cB_{ji} = A_{ji} + (cB)_{ji} = (A + cB)_{ji}$.
Also $A + cB \in \mathrm{Sym}_{n\times n}(K)$ wie gewünscht.

(4) Ein sehr wichtiges Beispiel!
Der Lösungsraum eines homogenen LGS: A sei eine $m \times n$-Matrix über K. Dann ist

$$\{X \in \mathrm{Mat}_{n\times 1}(K) \ ; \ AX = 0\}$$

ein Unterraum von $\mathrm{Mat}_{n\times 1}(K)$.

Beweis:
Ist $A \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(K), B, C \in \mathrm{Mat}_{n\times p}(K), d \in K$, so ist
$A(B + dC) = AB + dAC$.

(4) Denn
$[A(B+dC)]_{ij} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik}(B+dC)_{kj} = \sum A_{ik}(B_{kj}+(dC)_{kj})$
$= \sum A_{ik}B_{kj} + \sum A_{ik}(dC)_{kj} = \sum A_{ik}B_{kj} + \sum dA_{ik}C_{kj}$
$= (AB)_{ij} + d\sum A_{ik}C_{kj} = (AB)_{ij} + d(AC)_{ij}.$
Insbesondere:
Ist $AX_1 = AX_2 = 0$, so auch $A(X_1 + dX_2) = 0$. □

Definition 11.4.
Sei V ein K-Vektorraum und $X \subseteq V$. Eine lineare Kombination von Elementen aus X ist eine (endliche) Summe $\sum_{v\in X} c_v v$ mit $c_v \in K$, wobei $c_v = 0$ für alle bis auf endliche viele v.

Damit können wir nun definieren

Definition 11.5.
Sei V ein K-Vektorraum und $X \subseteq V$. Dann ist span(X), der von X *aufgespannte* oder *erzeugte* Unterraum, definiert als

$$\mathrm{span}(X) := \{\sum_{v\in X} c_v v \ ; \ c_v \in K \ \text{ und } \ c_v = 0 \text{ für alle bis auf endliche viele } v \in X\}.$$

Konvention: span$(\emptyset) = \{0\}$.

Proposition 11.6.
Für jede $X \subseteq V$ ist span(X) ein Unterraum.

Beweis
span$(\emptyset) = \{0\}$. Sonst $X \neq \emptyset$. Seien $\alpha = \sum_{v\in X} c_v v, \ \beta = \sum_{v\in X} d_v v \in$ span(X).
Sei $c \in K$. Also $\alpha + c\beta = \sum_{v\in X}(c_v + cd_v)v \in$ span(X). □

Es ist sogar der “kleinste” Unterraum der X enthält. Das ist unser nächstes Ziel .

Satz 11.7.
Sei V ein $K - VR$, und χ eine Menge von Unterräumen. Dann ist $\bigcap \chi$ ein Unterraum von V.

Beweis
$\bigcap \chi := \bigcap_{W\in\chi} W$.
$0_V \in W$ für alle $W \in \chi$ also $0_V \in \bigcap \chi \neq \emptyset$.
Sind $\alpha, \beta \in \bigcap \chi, c \in K$, so sind für jedes $W \in \chi$ auch $\alpha, \beta \in W$, also $\alpha + c\beta \in W$. Daraus folgt $\alpha + c\beta \in \bigcap \chi$. □

Es sei nun für $X \subseteq V$ $S(X)$ definiert als

$$S(X) := \bigcap \{W \subseteq V; W \text{ ist ein Unterraum und } X \subseteq W\}.$$

Satz 11.8.
Für $X \subseteq V$ ist $S(X) = \operatorname{span}(X)$.

Beweis
$X = \emptyset . S(X) := \bigcap\{W \subseteq V; W \text{ Unterraum}\} = \{0\} = \operatorname{span}(\emptyset)$.
$X \neq \emptyset$:

(1) $S(X) \subseteq \operatorname{span}(X)$:
$\operatorname{span}(X) \subseteq V$ ist ein Unterraum und $X \subseteq \operatorname{span}(X)$. Also $\operatorname{span}(X) \in \{W \subseteq V\ ;\ W$ ein Unterraum und $X \subseteq W\}$.
Also $v \in S(X) \Rightarrow v \in \bigcap\{W\ ;\ W$ ein Unterraum und $X \subseteq W\} \Rightarrow v \in \operatorname{span}(X)$.

(2) $\operatorname{span}(X) \subseteq S(X)$:
Sei $v \in \operatorname{span}(X), W \subseteq V$ ein Unterraum und $X \subseteq W$.
Da $v \in \operatorname{span}(X)$, existiert $(c_x; x \in X)$ ($c_x \in K$ für alle $x \in X$) mit $v = \sum_{x \in X} c_x\ x$, wobei $c_x = 0$ für alle bis auf endlich viele x. Da W ein Unterraum ist und $X \subseteq W$, ist $\sum_{x \in X} c_x\ x = v \in W$.
Da W beliebig war, ist v Element von jedem Unterraum mit diesen Eigenschaften, also auch des Durchschnitts. □

Wir können auch mehrere Unterräume zusammenfassen:

Definition 11.9.
Seien $S_1, \ldots, S_k \subseteq V, V$ ein $K-VR$.
Dann ist $S_1 + \cdots + S_k := \{x_1 + \cdots + x_k\ ;\ x_i \in S_i; 1 \leq i \leq k\}$
kurz auch $\sum_{i=1}^k S_i := \{\sum_{i=1}^k x_i\ ;\ x_i \in S_i; 1 \leq i \leq k\}$.

Korollar 11.10.
Seien $W_1, \ldots, W_k$ Unterräume von V. Dann ist $W := \sum_{i=1}^k W_i$ ein Unterraum von V und $W_i \subseteq W$ für $1 \leq i \leq k$.

Beweis
Übungsaufgabe □

Korollar 11.11.
Sind $W_1, \ldots, W_k$ Unterräme von V, so ist $\sum_{i=1}^k W_i = \operatorname{span}(\bigcup_{i=1}^k W_i)$.

Beweis
"$\subseteq$": Sei $v \in \sum W_i$. Also existiert $w_i, i \in \{1, \ldots k\}$ mit $w_i \in W_i$ und $v = \sum w_i$. Dann ist $w_i \in \bigcup_{j=1}^k W_j$ für jedes $1 \leq i \leq k$.
Also $v = \sum w_i \in \operatorname{span}(\bigcup_{j=1}^k W_j)$.

"$\supseteq$": Sei $v \in \operatorname{span}(\bigcup W_i)$. Dann existiert $(c_i; i \leq k)$ und $(w_i \mid i \leq k)$ mit $c_i \in K; w_i \in W_i$, so dass $v = \sum c_i w_i$.
(Bemerkung: Aus jedem W_i können mehrere Elemente stammen. Die müssen wir dann erst zusammenfassen!)
Da W_i Unterräume sind, ist mit $w_i \in W_i$ auch $c_i w_i \in W_i$. Also existiert $(w_i'\ ;\ i \leq k)$ mit $w_i' \in W_i$ und $v = \sum w_i'$ (nämlich $w_i' := c_i w_i$).
also $v \in \sum W_i$. □

Beispiel 11.12.
Sei $K \subseteq \mathbb{R}$ ein Teilkörper, ferner

$$\left.\begin{array}{lcl} \alpha_1 & := & (1,2,0,3,0) \\ \alpha_2 & := & (0,0,1,4,0) \\ \alpha_3 & := & (0,0,0,0,1) \end{array}\right\} \in K^5$$

$\alpha \in \operatorname{span}(\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\})$ genau dann, wenn $c_1, c_2, c_3 \in K$ existiert mit $\alpha = \sum_{i=1}^{3} c_i\alpha_i$, also hat α damit die Form $(c_1, 2c_1, c_2, 3c_1 + 4c_2, c_3)$ und
$\operatorname{span}(\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}) = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in K^5; x_2 = 2x_1, x_4 = 3x_1 + 4x_2\}$.

12 Script zur Vorlesung: Lineare Algebra I

Prof. Dr. Salma Kuhlmann

Kapitel 2: § 3 Basen und Dimension

Definition 12.1.
Sei V ein K-Vektorraum. $S \subseteq V$ ist *linear abhängig (l.a.)* über K, falls verschiedene $v_1, \dots, v_n \in S$ und skalaren $c_1, \dots, c_n \in K$ nicht alle Null existieren mit $c_1 v_1 + \cdots + c_n v_n = 0$.
S ist linear *unabhängig (l.u.)* über K, falls S nicht linear abhängig ist
(e.g. $\emptyset$ ist linear unabhängig).

Konvention
Sei $S = \{v_1, \dots, v_n\}$ endlich. Wir sagen: $v_1, \dots, v_n$ linear unabhängig / linear abhängig.

Bemerkung 12.2.

1. $S_1 \subseteq S_2$ und S_1 l. a. $\Rightarrow S_2$ l. a. also
2. $S_1 \subseteq S_2$ und S_2 l.u. $\Rightarrow S_1$ linear unabhängig.

Beispiel 12.3.

3. (i) $0 \in S \Rightarrow S$ l.a. (weil $1 \cdot 0 = 0$)
   (ii) $\{v\}$ ist linear abhängig genau dann, wenn $v = 0$
   (iii) $\{v_1, v_2\}$ ist linear abhängig genau dann, wenn $v_1 = cv_2$ für ein $c \in K$ oder $v_2 = 0$
4. S ist linear unabhängig genau dann, wenn jede endliche Teilmenge von S ist linear unabhängig, d.h. genau dann, wenn für verschiedene Vektoren $v_1, \dots, v_n \in S$ und alle $c_1, \dots, c_n \in K$ aus $\sum c_i v_i = 0$ folgt $c_i = 0$ für $1 \leq i \leq n$.

Beispiel 12.4.

$$\left.\begin{array}{rcl} v_1 & = & (3, 0, -3) \\ v_2 & = & (-1, 1, 2) \\ v_3 & = & (4, 2, -2) \\ v_4 & = & (2, 1, 1) \end{array}\right\} \in \mathbb{R}^3$$

$2v_1 + 2v_2 - v_3 + 0v_4 = 0 \Rightarrow$ l.a. über $\mathbb{R}$.

Beispiel 12.5.
Seien $\beta_1 = (1, 1, 2), \beta_2 = (1, 0, 1), \beta_3 = (2, 1, 3)$. Ist $\operatorname{span}(\{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}) = \mathbb{R}^3$?
Sei $\underline{b} = (b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{R}^3$, können wir $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$ finden mit
$(b_1, b_2, b_3) = c_1(1, 1, 2) + c_2(1, 0, 1) + c_3(2, 1, 3)$.
D.h.: Hat das LGS

$$\begin{array}{rcrcrcl} c_1 & + & c_2 & + & 2c_3 & = & b_1 \\ c_1 & & & + & c_3 & = & b_2 \\ 2c_1 & + & c_2 & + & 3c_3 & = & b_3 \end{array}$$

eine Lösung für **jede** $b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{R}$?

Satz 9.8 $\Rightarrow$ dies ist der Fall genau dann, wenn

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

invertierbar ist.

Beispiel 12.6.
$v_1 = (1, -2, 3), v_2 = (5, 6, -1), v_3 = (3, 2, 1)$ linear unabhängig?
Betrachte $c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3 = 0$. Also homogene LGS:

$$\left.\begin{array}{rcrcrcl} c_1 & + & 5c_2 & + & 3c_3 & = & 0 \\ -2c_1 & + & 6c_2 & + & 2c_3 & = & 0 \\ 3c_1 & - & c_2 & + & c_3 & = & 0 \end{array}\right\} v_1, v_2, v_3 \text{ l.u., gdw es nur triviale Lösung gibt.}$$

Also v_1, v_2, v_3 sind linear unabhängig genau dann, wenn

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ -2 & 6 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

invertierbar ist (Satz 9.8).

Definition 12.7.
Sei V ein K-Vektorraum. Eine *Basis* für V ist eine linear unabhängige Teilmenge, die V erzeugt. V ist *endlich dimensional*, falls es eine endliche Basis für V gibt, i.e.
$S = \{v_1, \ldots, v_n\} \subseteq V$ mit

(i) S linear unabhängig

(ii) $\operatorname{span}(S) = V$.

Beispiel 12.8.
$V = K^n$. Die *Standardbasis* ist $\{e_i; i = 1, \ldots, n\}$, wobei $e_i = (0, \ldots, 1, 0, \ldots, 0); 1 \to i$-te Stelle.

Satz 12.9.
Sei V ein K-Vektorraum, so dass V endlich erzeugt ist, i.e.
$\exists \beta_1, \ldots, \beta_m \in V$ mit $\operatorname{span}(\{\beta_1, \ldots, \beta_m\}) = V$. Dann ist jede linear unabhängige Teilmenge endlich und hat höchstens m Elemente.

Beweis
Wir zeigen: Hat $S \subseteq V$ mehr als m Elemente, dann ist S linear abhängig.
Seien $v_1, \ldots, v_n \in S; n > m$ verschiedene Vektoren.
$\forall j = 1, \ldots, n,\ v_j \in \operatorname{span}(\{\beta_1, \ldots \beta_m\})$, also für $j = 1, \ldots, n$ $\exists A_{1j}, \ldots, A_{mj} \in K$ mit

$$v_j = \sum_{i=1}^{m} A_{ij} \beta_i.$$

Wir analysieren nun lineare Kombinationen der $v_j; 1 \leq j \leq n$.
Für $x_1, \ldots, x_n \in K$ berechne

$\sum_{j=1}^{n} x_j v_j = \sum_{j=1}^{n} x_j \sum_{i=1}^{m} A_{ij} \beta_i = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} (A_{ij} x_j) \beta_i$
$= \sum_{i=1}^{m} (\sum_{j=1}^{n} A_{ij} x_j) \beta_i$ (*)

Betrachte das homogene LGS in m Gleichungen und n Unbekannten $x_1, \ldots, x_n$:
$\sum_{j=1}^{n} A_{ij} x_j = 0 \quad 1 \leq i \leq m$ (**)

$n > m$ also Satz (Korollar 7.2) impliziert, dass es nicht triviale Lösungen gibt.
Also $\exists x_1, \ldots, x_n \in K$ nicht alle Null, so dass $\sum_{j=1}^{n} A_{ij} x_j = 0$ für alle $1 \leq i \leq m$.
Zurück in $(*)$ ergibt l.a. der $v_j; 1 \leq j \leq n$. □

13 Script zur Vorlesung: Lineare Algebra I

Prof. Dr. Salma Kuhlmann

Korollar 13.1.
Sei V endlich dim. Vektorraum über K. Es gilt: Alle Basen haben dieselbe Kardinalität.

Beweis
Seien Basen $\left\{\begin{array}{lcl} \mathcal{B}_1 & = & \{\beta_1,\dots,\beta_m\} \\ \mathcal{B}_2 & = & \{\alpha_1,\dots,\alpha_n\} \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{erzeugt} \\ \text{linear unabhängig} \end{array} \left.\begin{array}{l} \\ \\ \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{linear unabhängig} \\ \text{erzeugt} \end{array}$

Satz 12.9 impliziert $n \leq m$ und auch $m \leq n$, also $m = n$ $\square$

Wir können nun eindeutig $\dim V$ definieren.

Definition 13.2.
Sei V endlich dim. K-Vektorraum.
$\dim V := \mid \mathcal{B} \mid \quad \mathcal{B}$ eine Basis für V.

Wir können nun den Satz 12.9 umformulieren.

Korollar 13.3.
Sei V ein endlich dim. Vektorraum; $n := \dim V$.

(a) Jede Teilmenge mit mehr als n Elementen ist linear abhängig. (Eine linear unabhängige Teilmenge hat $\leq n$ Elemente.)

(b) Jede Teilmenge mit weniger als n Elementen ist nicht erzeugend. (Eine erzeugende Teilmenge hat $\geq n$ Elemente.)

Beispiel 13.4.

(a) $V = \{0\}, \quad \mathcal{B} = \emptyset, \quad \dim V = \mid \emptyset \mid = 0$

(b) $\dim K^n = n$, weil die Standardbasis $\mathcal{E} := \{e_1,\dots,e_n\}$ hat $\mid \mathcal{E} \mid = n$.

(c) $K^{m\times n} = \mathrm{Mat}_{m\times n}$ hat die Dimension mn: Die $m \times n$-Matrizen mit einer 1 in der ij-ten Stelle und 0 sonst bilden eine Basis.

Korollar 13.5.

(d) $V = K^{\mathbb{N}} := \{f \mid f : \mathbb{N} \to K\}$ ist **nicht** endlich dim, weil die Elemente
$f_i : \mathbb{N} \to K$
$f_i(n) := \begin{cases} 1 & n = i \\ 0 & n \neq i \end{cases}$
eine unendliche linear unabhängige Teilmenge definieren, nämlich
$S := \{f_i | i \in \mathbb{N}\}$.
Seien $i_1 < \dots < i_k$ und $c_1 f_{i_1} + \dots + c_k f_{i_k} = 0$, so ist
$(c_1 f_{i_1} + \cdots c_k f_{i_k})(i_l) = c_l = 0$, für alle $l = 1,\dots,k$.

Lemma 13.6.
(Fortsetzung Lemma)
Sei V ein K-Vektorraun. Sei S linear unabhängig in V und $\beta \notin \operatorname{span}(S)$. Dann ist $S \cup \{\beta\}$ linear unabhängig.

Beweis
Seien $c_1, \ldots, c_m, b \in K$ und $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in S$ mit $c_1\alpha_1 + \cdots + c_m\alpha_m + b\beta = 0$.
Behauptung: $b = 0$, sonst $b\beta = (-c_1)\alpha_1 + \cdots + (-c_m)\alpha_m, b \neq 0$.

Also $\beta = [(-c_i)b^{-1}]\alpha_1 + \cdots + [(-c_m)b^{-1}]\alpha_m \Rightarrow \beta \in \operatorname{span}(S)$ - Widerspruch.

Also $b = 0$.
Also $\sum c_i\alpha_i = 0$ und S ist linear unabhängig $\Rightarrow c_i = 0$, für alle $1 \leq i \leq m$. □

Satz 13.7.
Sei V ein endlich dim. K-Vektorraum und $W \subseteq V$ ein Unterraum. Jede linear unabhängige Teilmenge von W ist endlich und ist Teil einer (endlichen) Basis für W.

Beweis
Sei $S \subseteq W$ linear unabhängig und beobachte: $S \subseteq V$ ist linear unabhängig. Also $\mid S \mid \leq \dim V$.
Sei nun $S_0 \subseteq W$ linear unabhängig. Wir setzten S_0 zu einer Basis für W fort wie folgend.
Betrachte $\operatorname{span}(S_0) \subseteq W$. Unterraum.
Falls $=$ dann ist S_0 bereits eine Basis.
Fall $\subsetneq$, sei $\beta_1 \in W; \beta_1 \notin \operatorname{span}(S_0)$. Setze $S_1 := S_0 \cup \{\beta_1\}$ linear unabhängig (Lemma 13.6).
Wiederhole: $S_1 \cup \{\beta_2\} := S_2$ linear unabhängig usw.
In höchstens $\dim V$ vielen Schritten erreichen wir $S_m = S_0 \cup \{\beta_1, \ldots, \beta_m\}$, wofür $\operatorname{span}(S_m) = W$ sein muss!
Ferner S_m linear unabhängig , also S_m Basis für W. □

Korollar 13.8.
Sei W ein **echter** Unterraum vom endlich dim. K-Vektorraum V (i.e. $W \subsetneq V$). Dann ist W endlich dim. und $\dim W < \dim V$.

Beweis
Setze $S_0 = \emptyset$ und setze fort wie im Beweis von Satz. Wir erhalten eine Basis S_m von W; $\operatorname{span}(S_m) = W$ in $m \leq \dim V$ vielen Schritten. Also $m := \dim W \leq \dim V$.
Aber W echt; $\exists \beta \notin W$, i.e. $\beta \notin \operatorname{span}(S_m)$. Also $S_m \cup \{\beta\}$ linear unabhängig; so $m + 1 \leq \dim V$.
Also $m < \dim V$. □

Korollar 13.9. (Basisergänzung)
Sei V endlich dim. Vektorraum über K. Jede linear unabhängige Teilmenge ist Teil einer Basis.

Korollar 13.10.
Seien W_1, W_2 endlich dim. K-Vektorräume. ($W_1 \subseteq V$ und $W_2 \subseteq V$ Unterräume.) Es gilt $W_1 + W_2$ ist endlich dim. und $\dim W_1 + \dim W_2 = \dim(W_1 \cap W_2) + \dim(W_1 + W_2)$.

Beweis
Satz und Korollare implizieren, dass $W_1 \cap W_2$ eine endliche Basis $\{\alpha_1, \dots, \alpha_k\}$ hat und es gibt $\{\alpha_1, \dots, \alpha_k, \beta_1, \dots, \beta_m\}$ eine Basis für W_1, $\{\alpha_1, \dots, \alpha_k, \delta_1, \dots, \delta_n\}$ eine Basis für W_2 für geeignete $\underbrace{\beta_1, \dots, \beta_m}_{\in W_1}, \underbrace{\delta_1, \dots, \delta_n}_{\in W_2}$.

Der Vektorraum $W_1 + W_2$ wird von $\alpha_1, \dots, \alpha_k; \beta_1, \dots, \beta_m; \delta_1, \dots, \delta_n$ erzeugt.

Behauptung
Diese Vektoren sind linear unabhängig.

Beweis
Seien $x_i, i = 1, \dots, k; y_j, j = 1, \dots, m$ und $z_r, r = 1, \dots, n \in K$
$\sum x_i\alpha_i + \sum y_j\beta_j + \sum z_r\delta_r = 0$ (*).

$\Rightarrow -\sum z_r\delta_r = \sum x_i\alpha_i + \sum y_j\beta_j$.

Also $\sum z_r\delta_r \in W_1$. Aber auch $\in W_2$ per Definition. Also $\in W_1 \cap W_2$.

Also $\sum z_r\delta_r = \sum c_i\alpha_i$ für geeignete $c_1, \dots, c_k \in K$.

Aber $\{\alpha_1 \dots, \alpha_k, \delta_1, \dots, \delta_n\}$ sind linear unabhängig $\Rightarrow z_r = 0$, für alle $1 \leq r \leq n$.

Also $\sum x_i\alpha_i + \sum y_j\beta_j = 0$ in $(*)$ und $\{\alpha_1 \dots, \alpha_k, \beta_1, \dots, \beta_m\}$ sind linear unabhängig $\Rightarrow x_i = 0$ und $y_j = 0$, für alle $1 \leq i \leq k$ und $1 \leq j \leq m$.

Also $\dim W_1 + \dim W_2 = (k + m) + (k + n) = k + (m + k + n)$. $\square$

14 Script zur Vorlesung: Lineare Algebra I

Prof. Dr. Salma Kuhlmann

Kapitel 2: § 4 Koordinaten

Definition 14.1.
Sei V endlich dim. K-Vektorraum; $\dim V = n$.
Eine *geordnete Basis* ist ein n-Tupel $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$; $\alpha_i \in V$, so dass $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ eine Basis ist.

Notation und Terminologie
Wir schreiben auch $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ ist eine geordnete Basis. (Wir werden nicht immer $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ schreiben.)

Lemma 14.2.
Sei V ein endlich dim. K-Vektorraum und sei $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ eine geordnete Basis; sei $\alpha \in V$, dann existiert ein eindeutiges n-Tupel $(x_1, \ldots, x_n) \in K^n$ mit $\alpha = \sum_{i=1}^n x_i \alpha_i$.

Beweis
$\alpha = \sum z_i \alpha_i \Rightarrow \sum_{i=1}^n (x_i - z_i)\alpha_i = 0 \Rightarrow x_i - z_i = 0 \Rightarrow x_i = z_i$, für alle $1 \leq i \leq n$. $\square$

Definition 14.3.
(1) x_i ist die *i-te Koordinate von α bezüglich $\mathcal{B}$*.

(2) $(x_1, \ldots, x_n)$ ist das *Koordinaten-Tupel von α bezüglich $\mathcal{B}$*.

Definition 14.4.
V, W sind K-Vektorräume.

(1) $T : V \to W$ ist eine *lineare Abbildung* (oder *Transformation*), falls
  (a) $T(\alpha + \beta) = T(\alpha) + T(\beta)$
  (b) $T(c\alpha) = cT(\alpha)$;
  $\alpha, \beta \in V; c \in K$;
  (a) und (b) sind äquivalent zu: $\forall \alpha, \beta \in V$, $\forall c \in K$
  (c) $T(c\alpha + \beta) = cT(\alpha) + T(\beta)$

  Bemerkung
  $$\left.\begin{array}{rcl} T(0) & = & T(0+0) \\ & = & T(0) + T(0) \end{array}\right\} \Rightarrow T(0) = 0.$$

(2) T ist eine *Isomorphie* oder ein *Isomorphismus*, falls T ferner bijektiv ist.

Notation
$V \overset{T}{\simeq} W$ oder $V \simeq W$

Terminologie
V und W sind isomorph.

Lemma 14.5.
Sei T eine lineare Transformation. Dann ist T injektiv genau dann, wenn $\forall\alpha(T(\alpha) = 0 \Rightarrow \alpha = 0)$.

Beweis
"$\Rightarrow$" T ist injektiv und $T(\alpha) = 0 = T(0)$. Also $\alpha = 0$.

"$\Leftarrow$" Sei $T(\alpha_1) = T(\alpha_2)$, dann $T(\alpha_1) - T(\alpha_2) = 0$, i.e. $T(\alpha_1 - \alpha_2) = 0$.
Also $\alpha_1 - \alpha_2 = 0$ und $\alpha_1 = \alpha_2$. $\square$

Satz 14.6.
Sei V ein K-Vektorraum, $\dim V = n \Rightarrow V \simeq K^n$.

Beweis
Sei $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ eine geordnete Basis. Definiere $T : V \to K^n$
$\alpha \mapsto \underbrace{(x_1, \dots, x_n)}$
$:=$ Koordinaten-Tupel von α bezüglich $\mathcal{B}$.

- $T(\alpha + \beta) \stackrel{?}{=} T(\alpha) + T(\beta)$.

Sei $\alpha = \sum x_i\alpha_i, \beta = \sum y_i\alpha_i, \alpha+\beta = \sum(x_i+y_i)\alpha_i$ eindeutig $\Rightarrow T(\alpha+\beta) = (x_1+y_1, \dots, x_n+y_n) = (x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = T(\alpha) + T(\beta)$.

- Analog $T(c\alpha) = cT(\alpha)$.
- $T(\alpha) = (0, \dots, 0) \Rightarrow \alpha = 0$, weil $x_1 = \cdots = x_n = 0$.

So T injektiv.

Sei $(x_1, \dots, x_n) \in K^n$. Setze $\alpha := \sum x_i\alpha_i \in V$. Es gilt $T(\alpha) = (x_1, \dots, x_n)$.
So T surjektiv. $\square$

Notation
Koordinaten Spaltenmatrix von α bezüglich $\mathcal{B}$:

$$[\alpha]_{\mathcal{B}} := \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

15 Script zur Vorlesung: Lineare Algebra I

Prof. Dr. Salma Kuhlmann

Beispiel 15.1.
$V = \mathbb{R}^3; \quad \mathcal{B} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$

$$\left.\begin{array}{lcl} \alpha_1 & = & (1,2,1) \\ \alpha_2 & = & (2,9,0) \\ \alpha_3 & = & (3,3,4) \end{array}\right\} \text{ ist eine Basis, weil } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 9 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \text{ invertierbar ist (siehe Korollar 15.6).}$$

Aufgabe: Finde

(*i*) $\alpha \in \mathbb{R}^3$ mit $[\alpha]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

und finde

(*ii*) $[\alpha]_{\mathcal{B}}$ für $\alpha = (5, -1, 9)$.

Zu *(i)*: $\alpha = -\alpha_1 + 3\alpha_2 + 2\alpha_3 = (11, 31, 7)$

Zu *(ii)*: Finde x_1, x_2, x_3 mit $\alpha = \sum_{i=1}^{3} x_i \alpha_i$ d.h.

$(5, -1, 9) = x_1(1,2,1) + x_2(2,9,0) + x_3(3,3,4)$

Löse LGS:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 5 \\ 2x_1 & + & 9x_2 & + & 3x_3 & = & -1 \\ x_1 & & & + & 4x_3 & = & 9 \end{array}$$

Lösung: $x_1 = 1 \quad x_2 = -1 \quad x_3 = 2$

$$[\alpha]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Was ist der Zusammenhang zwischen $[\alpha]_{\mathcal{B}}$ und $[\alpha]_{\mathcal{B}'}$ für $\mathcal{B}$ und $\mathcal{B}'$ geordenete Basen?

Bemerkung 15.2.
$[\alpha]_{\mathcal{B}} = 0 \Leftrightarrow [\alpha]_{\mathcal{B}'} = 0.$

Sei $\mathcal{B} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ und $\mathcal{B}' = (\alpha'_1, \ldots, \alpha'_n)$.

Schreibe $\alpha'_j = \sum_{i=1}^{n} p_{ij}\alpha_i$, wobei $p_{ij} \in K$ eindeutig sind, $\forall j = 1, \ldots, n$.

D.h. $[\alpha'_j]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} p_{1j} \\ \vdots \\ p_{nj} \end{pmatrix}$.

Nun sei $\alpha \in V$ beliebig und $[\alpha]_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$

Wir wollen nun $[\alpha]_{\mathcal{B}}$ berechnen.

Also $\alpha = \sum_{j=1}^n x'_j \alpha'_j = \sum_{j=1}^n x'_j \sum_{i=1}^n p_{ij}\alpha_i = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n (p_{ij}x'_j)\alpha_i$
$= \sum_{i=1}^n (\sum_{j=1}^n p_{ij}x'_j)\alpha_i. \qquad (*)$

Es folgt aus $(*)$, dass die i-te Koordinate von α bezüglich $\mathcal{B}$ ist:

$$x_i = \sum_{j=1}^n p_{ij}x'_j \quad 1 \leq i \leq n \qquad (**)$$

Sei P die $n \times n$-Matrix mit ij-tem Koeffizient p_{ij}.
Wir schreiben $(**)$ um: $[\alpha]_{\mathcal{B}} = P[\alpha]_{\mathcal{B}'}$, d.h.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n p_{1j}x'_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n p_{nj}x'_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ p_{n1} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$$

Ferner aus $[\alpha]_{\mathcal{B}} = 0 \Leftrightarrow [\alpha]_{\mathcal{B}'} = 0$ folgt, dass das homogene LGS $PX' = 0$ nur die triviale Lösung $X' = 0$ hat. Also ist P invertierbar. Wir bekommen also $[\alpha]_{\mathcal{B}'} = P^{-1}[\alpha]_{\mathcal{B}}$.

Wir haben bewiesen:

Satz 15.3.
Sei $\dim V = n$ über K, $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ geordnete Basen wie in Bemerkung 15.2; P die eindeutig definierte invertierbare Matrix mit Spalten $P_j := [\alpha'_j]_{\mathcal{B}}$ für $j = 1, \ldots, n$. Es gelten für alle $\alpha \in V$:

(i) $[\alpha]_{\mathcal{B}} = P[\alpha]_{\mathcal{B}'}$ und

(ii) $[\alpha]_{\mathcal{B}'} = P^{-1}[\alpha]_{\mathcal{B}}$.

Satz 15.4.
Sei $\dim V = n$ über K, P eine invertierbare $n \times n$-Matrix und $\mathcal{B}$ eine geordnete Basis. Es gibt eine eindeutig definierte (eindeutig bestimmte) geordnete Basis $\mathcal{B}'$ von V, so dass für alle $\alpha \in V$ gelten:

(i) $[\alpha]_{\mathcal{B}} = P[\alpha]_{\mathcal{B}'}$ und

(ii) $[\alpha]_{\mathcal{B}'} = P^{-1}[\alpha]_{\mathcal{B}}$.

Beweis
Wenn $\mathcal{B}' = (\alpha'_1, \ldots, \alpha'_n)$ *(i)* erfüllen sollte, dann gilt notwendigerweise insbesondere
$\forall j = 1, \ldots, n$:

$$[\alpha'_j]_{\mathcal{B}} = P[\alpha'_j]_{\mathcal{B}'} = P \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{1j} \\ \vdots \\ p_{nj} \end{pmatrix} = P_j$$

Also definiere $\alpha'_j := \sum_{i=1}^n p_{ij}\alpha_i$.

Nun zeigen wir, dass die so definierten α'_j eine Basis bilden [Aus Satz 15.3 (i) und (ii) folgen dann Satz 15.4 (i) und (ii)].

Sei $Q := P^{-1}$. Wir berechnen:

$\sum_j Q_{jk}\alpha'_j = \sum_j Q_{jk}\sum_i p_{ij}\alpha_i = \sum_j\sum_i p_{ij}Q_{jk}\alpha_i = \sum_i \underbrace{\left(\sum_j p_{ij}Q_{jk}\right)}_{(PQ)_{ik}} \alpha_i = \sum_i(\delta_{ik})\alpha_i = \alpha_k$ für $1 \leq k \leq n$.

Also $\operatorname{span}(\mathcal{B}') \supseteq \mathcal{B}$. So $\operatorname{span}(\mathcal{B}') = V$. Die Behauptung folgt nun aus Hilfslemma 2. $\square$

(Siehe HL1 und HL2)

ÜB $\begin{cases} \textbf{Hilfslemma 1:} & \dim V = n; X \subseteq V; \\ & \mid X \mid = n \text{ und } X \text{ linear unabhängig } \Rightarrow X \text{ eine Basis.} \\ \textbf{Hilfslemma 2:} & \dim V = n; X \subseteq V; \\ & \mid X \mid = n \text{ und } X \text{ erzeugt } \Rightarrow X \text{ eine Basis.} \end{cases}$

Korollar 15.5.
Sei P eine $n \times n$-Matrix über K. Es gilt: P ist invertierbar genau dann, wenn die Spalten von P linear unabhängig in $\operatorname{Mat}_{n\times 1}(K)$ sind.

Beweis
Wegen Satz 9.8 gilt: P ist invertierbar genau dann, wenn das homogene LGS
$P\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = PX = 0$ nur die triviale Lösung hat, gdw $\sum_{i=1}^{n} x_i P_i = 0$ eine triviale lineare Kombination ist (wobei P_i die i-te Spalte von P ist), gdw die Spalten von P linear unabhängig sind.

Korollar 15.6.
Sei $\dim V = n$ und P eine $n \times n$-Matrix. Es gilt: P ist invertierbar genau dann, wenn die Spalten von P eine Basis für V bilden.

Beispiel 15.7.
Sei $K = \mathbb{R}$ und $\theta \in \mathbb{R}$. Wir beschreiben eine parametrische Familie von geordneten Basen für $\mathbb{R}^2$.
$P = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ ist invertierbar mit

$P^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.

So gilt für jedes $\theta \in \mathbb{R}$, dass $\mathcal{B}_\theta := \{(\cos\theta, \sin\theta),\ (-\sin\theta, \cos\theta)\}$ eine Basis für $\mathbb{R}^2$ ist.

Dann ist $[\alpha]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, die Koordinaten-Spalten-Matrix bezüglich der geordneten Standard-Basis $\mathcal{E} := (e_1, \ldots, e_n)$ (siehe Beispiel 13.4).

Es gilt wegen Satz 15.4 (ii):
$[\alpha]_{\mathcal{B}_\theta} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1\cos\theta & + & x_2\sin\theta \\ -x_1\sin\theta & + & x_2\cos\theta \end{pmatrix}$

16 Script zur Vorlesung: Lineare Algebra I

Prof. Dr. Salma Kuhlmann

Erinnerung

(i) $y = (y_1 \ \cdots \ y_n)$.

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \quad \alpha_i : i\text{-te Zeile.}$$

Es gilt: $yA = y_1\alpha_1 + \cdots + y_n\alpha_n$.

(ii) i-te Zeile von $BA = [i$-te Zeile von $B]A$

$$= (B_{i1} \ \cdots \ B_{in}) \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^{n} B_{ij}\alpha_j; \ 1 \leq i \leq n.$$

Also ist die i-te Zeile von BA eine lineare Kombination der Zeilen von A.

Korollar 16.1.
A $n \times n$ über K, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ die Zeilenvektoren von A linear unabhängig $\Rightarrow$ A invertierbar.

Beweis
$\mathcal{B} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ ist eine Basis für K^n, also schreibe Standard Basisvektor:
$e_i = \sum_{j=1}^{n} B_{ij}\alpha_j \quad 1 \leq i \leq n$.

Sei B die $n \times n$-Matrix mit B_{ij} als Koeffizienten. Betrachte die Matrix BA, die i-te Zeile von $BA = [i$-te Zeile von $B]A$, i.e. $(B_{i1} \ \cdots \ B_{in})A = \sum_{j=1}^{n} B_{ij}\alpha_j = e_i$. Also $BA = I_n$. $\square$

Für die Umkehrung siehe Übungsblatt.

Kapitel 2: § 5 Zeilenraum

Definition 16.2.

Sei $A = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ ----\\ ----\\ ----\\ \alpha_m \end{pmatrix}$ $m \times n$ über K und $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in K^n$ Zeilenvektoren von A.

Der *Zeilenraum* von A ist span $\{\alpha_1, \dots, \alpha_m\} \subseteq K^n$ (Unterraum).

Der *Zeilenrang* von A ist die Dimension davon.

Satz 16.3.
Zwei zeilenäquivalente Matrizen A und B haben denselben Zeilenraum.

Beweis
Setzte $B = PA$; P invertierbar; A, B $m \times n$.
A $m \times n$; B $m \times n$; P $m \times m$
So $B = P\ A\ \leftarrow$ jede B-Zeile ist eine Linearkombination von A-Zeilen.
Also $A = P^{-1}B \leftarrow$ jede A-Zeile ist eine Linearkombination von B-Zeilen.
Also liegt jeder B-Zeilenvektor in span$\{\alpha_1, \dots, \alpha_m\}$ und umgekehrt.
Also Zeilenraum von A = Zeilenraum von B. □

Wir werden auch die Umkehrung von Satz 16.3 zeigen (siehe Übungsblatt). Dafür studieren wir den Zeilenraum von Matrizen in r.Z.S.F.

Satz 16.4.
Sei $R \not\equiv 0$ in r.Z.S.F. Dann bilden die Zeilenvektoren von R die ungleich 0 sind, eine Basis für den Zeilenraum von R (also Zeilenrang von $R = \sharp$ der Zeilen, die ungleich 0 sind).

Beweis

Seien $p_1, \dots, p_r$ die Zeilen $\neq 0$; $R = \begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_r \\ \vdots \end{pmatrix}$

Es ist klar, dass $p_1, \dots, p_r$ den Zeilenraum erzeugen. Wir zeigen nun lineare Unabhängigkeit (analog Beispiel 13.4 (d)).
Seien $k_1 < \cdots < k_r$ die Spaltenindexe (in der die Haupteinse der p_i erscheinen)
$c_1p_1 + \cdots + c_rp_r = c_1(0, \dots, 0, 1, \dots) + c_2(0, \dots, 0, 0, 1, \dots) + \cdots + c_r(0, \dots, 0, 1, \dots) = (0, \dots, 0)$
impliziert $c_1 = \cdots = c_r = 0$. □

17 Script zur Vorlesung: Lineare Algebra I

Prof. Dr. Salma Kuhlmann

Kapitel 3: § 1 Lineare Transformationen

Definition 17.1.

(i) Seien V, W K-VR. Eine Abbildung $T : V \to W$ ist eine lineare Transformation wenn

$$\forall \alpha, \beta \in V, \forall c \in K : T(\alpha + c\beta) = T(\alpha) + cT(\beta)$$

(ii) Eine lineare Transformation $T : V \to V$ heißt linearer Operator.

Beispiel 17.2.

(i) $T = 0$.

(ii) $I(\alpha) = \alpha$ Identität

Beispiel 17.3.
$V :=$ Polynomiale Funktionen über K.
$f(x) = c_0 + c_1 x + \cdots + c_k x^k$

$(Df)(x) = c_1 + 2c_2 x + \cdots + kc_k x^{k-1}$
Ableitung Operator.

Beispiel 17.4.
Sei A eine $m \times n$-Matrix über K.

(a) $T : K^{n\times 1} \to K^{m\times 1}$
$T(X) := AX$

(b) $U : K^{1\times m} \to K^{1\times n}$
$U(\alpha) = \alpha A$

Beispiel 17.5.
P ist eine $m \times m$-Matrix; Q ist eine $n \times n$-Matrix.
$T : K^{m\times n} \to K^{m\times n}$

$T(A) := PAQ$ ist ein linearer Operator.

Bemerkung 17.7.
Lineare Abbildungen erhalten l. K.: $T(\sum_{j=1}^{n} c_j\alpha_j) = \sum_{j=1}^{n} c_j T(\alpha_j)$.

Satz 17.8.
Sei V ein endlich dim Vektorraum über K und W ein K-VR. Sei $\mathcal{B} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ eine geordnete Basis für V. Seien $\beta_1, \dots, \beta_n$ beliebige Vektoren in W.
Es existiert eine einzige lineare Transformation $T : V \to W$ mit $T(\alpha_j) = \beta_j$
für alle $1 \leq j \leq n$. $(*)$

Beweis
Existenz: Sei $\alpha \in V$. $\alpha = \sum x_j\alpha_j$.
Definiere $T(\alpha) := \sum x_j\beta_j$. Insbesondere ist $(*)$ erfüllt.
Ist T linear?
Sei $\gamma = y_1\alpha_1 + \cdots + y_n\alpha_n$ und sei $c \in K$. Man hat:
$c\alpha + \gamma = (cx_1 + y_1)\alpha_1 + \cdots + (cx_n + y_n)\alpha_n$. Also

$T(c\alpha + \gamma) = (cx_1 + y_1)\beta_1 + \cdots + (cx_n + y_n)\beta_n$

$= (cx_1\beta_1 + y_1\beta_1) + \cdots + (cx_n\beta_n + y_n\beta_n)$

$= (cx_1\beta_1 + \cdots + cx_n\beta_n) + (y_1\beta_1 + \cdots + y_n\beta_n)$

$= c(x_1\beta_1 + \cdots + x_n\beta_n) + (y_1\beta_1 + \cdots + y_n\beta_n) = cT(\alpha) + T(\gamma)$

Eindeutigkeit: Seien $T, U : V \to W$ linear mit $T(\alpha_j) = \beta_j = U(\alpha_j)$.
Zu zeigen: $T(\alpha) = U(\alpha)$ für alle $\alpha \in V$.

Berechne:
$U(\alpha) = U(\sum c_j\alpha_j) = \sum c_jU(\alpha_j) = \sum c_jT(\alpha_j) = T(\sum c_j\alpha_j) = T(\alpha)$. □

Bemerkung 17.9.
Wir haben gezeigt:

(1) $T, U : V \to W$ lineare Transformation. Es gilt: $T = U$ genau dann, wenn $T(\alpha_j) = U(\alpha_j)$ für alle $1 \leq j \leq n$ für eine geordnete Basis $(\alpha_j; 1 \leq j \leq n)$ von V.

(2) Wenn wir die Werte $T(\alpha_j)$ kennen, dann können wir "T per Linearität fortsetzen".

Beispiel 17.10.
$V = \mathbb{R}^2, W = \mathbb{R}^3$.

$$\left.\begin{array}{rcl} \alpha_1 & = & (1,2) \\ \alpha_2 & = & (3,4) \end{array}\right\} \text{Basis für } V.$$

$\beta_1 = (3, 2, 1)$
$\beta_2 = (6, 5, 4)$

$T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$
$T(1, 2) = (3, 2, 1)$
$T(3, 4) = (6, 5, 4)$

$T(e_1) =?$
$e_1 = (1, 0) = (-2)(1, 2) + (3, 4)$
$T(e_1) = (-2)(3, 2, 1) + (6, 5, 4) = (0, 1, 2)$.

Kapitel 3: § 2 Bild und Nullraum (Kern)

Lemma 17.12.
Sei $T : V \to W$ eine lineare Tansformation.

(1) $T(V) := R_T = \{T(\alpha); \alpha \in V\}$

$= \{w \mid w \in W$ und es existiert ein $\alpha \in V$ mit $T(\alpha) = w\}$
ist ein Unterraum von W.

(2) $N := T^{-1}\{0\} := \{\alpha \mid \alpha \in V$ und $T(\alpha) = 0\}$.

$N := \ker(T)$ ist ein Unterraum von V.

Beweis

(1) $\beta_1, \beta_2 \in R_T; c \in K \Rightarrow c\beta_1 + \beta_2 \in R_T$?

$\beta_1 = T(\alpha_1) \qquad \beta_2 = T(\alpha_2)$

$T(c\alpha_1 + \alpha_2) = cT(\alpha_1) + T(\alpha_2) = c\beta_1 + \beta_2$.

$T(0) = 0 \in R_T$. Also $R_T \neq \emptyset$. R_T ist ein Unterraum.

(2) $\alpha_1, \alpha_2 \in N$

$T(c\alpha_1 + \alpha_2) = c0 + 0 = 0$. Also $c\alpha_1 + \alpha_2 \in N$. Auch $0 \in N$, so dass $N \neq \emptyset$. □

Definition 17.13.
Sei V endlich dim; $T : V \to W$ eine lineare Transformation.
rang $(T) :=$ dim R_T.

18 Script zur Vorlesung: Lineare Algebra I

Prof. Dr. Salma Kuhlmann

Bemerkung 18.1.
V endlich dim; $T : V \to W$ eine lineare Transformation.
Es gilt: $R_T = T(V) \subseteq W$ (Unterraum) ist endlich erzeugt, weil:
Sei $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ eine Basis für V und $\alpha \in V$. Setze $\beta_i := T(\alpha_i)$ für jedes $i = 1, \ldots, n$.
$T(\alpha) = T(\sum c_i\alpha_i) = \sum c_i T(\alpha_i) = \sum c_i\beta_i$.
$\Rightarrow T(\alpha) \in$ span $\{\beta_1, \ldots, \beta_n\}$. Also $R_T =$ span $\{\beta_1, \ldots, \beta_n\}$. $\square$

Satz 18.2.
V endlich dim; $T : V \to W$ eine lineare Transformation.
Es gilt: dim $V =$ dim $\ker T+$ rang T.

Beweis
Sei $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\}$ eine Basis für $N = \ker T$. Sei $\alpha_{k+1}, \ldots, \alpha_n \in V$, so dass $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \alpha_{k+1}, \ldots, \alpha_n\}$ eine Basis für V ist.
Behauptung: $\{T(\alpha_{k+1}), \ldots, T(\alpha_n)\}$ bilden eine Basis für R_T.
Beweis: Aus Bemerkung 18.1 folgt: $\{\underbrace{T(\alpha_1), \ldots, T(\alpha_k)}_{=0}, T(\alpha_{k+1}), \ldots, T(\alpha_n)\}$ erzeugen R_T.

Also $\{T(\alpha_{k+1}), \ldots, T(\alpha_n)\}$ erzeugen R_T. Sei nun $\sum_{i=k+1}^n c_i(T(\alpha_i)) = 0$.

Also $T(\underbrace{\sum_{i=k+1}^{n} c_i\alpha_i}_{:=\alpha}) = 0$.

Also $\alpha \in N$; es existiert $b_1, \ldots, b_k \in K$ mit $\alpha = \sum_{i=1}^k b_i\alpha_i$.

Also $0 = \alpha - \alpha = \sum_{i=1}^k b_i\alpha_i - \sum_{j=k+1}^n c_j\alpha_j = 0$.

Aber $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \alpha_{k+1}, \ldots, \alpha_n\}$ sind linear unabhängig also
$b_1 = \cdots = b_k = c_{k+1} = \cdots = c_n = 0$. $\square$

Kapitel 3: § 3 Die Algebra der linearen Transformation

Seien V, W Vektorräume über K. Wir haben gesehen, dass Fkt $(V,W) = \{f\ ;\ f : V \to W$ eine Funktion $\}$ versehen mit Funktion Addition und Skalarmultiplikation ein K-Vektorraum ist.

Satz 18.4.
Setze $L(V,W) := \{T\ ;\ T : V \to W$ lineare Transformation$\} := L$ mit Addition
$(T+U)(\alpha) := T(\alpha) + U(\alpha)$ für alle T und $U \in L$, $\alpha \in V$ und Skalarmultiplikation
$(dT)(\alpha) := d(T(\alpha))$ für $d \in K$.
Es gilt: $T + U \in L$ und $dT \in L$.

Beweis
$(T+U)(c\alpha + \beta) = c(T+U)(\alpha) + (T+U)(\beta)$ (Übungsaufgabe)
$(dT)(c\alpha + \beta) = dT(c\alpha + \beta) = d(cT(\alpha) + T(\beta)) = cdT(\alpha) + dT(\beta)$
$= c(dT(\alpha)) + (dT)(\beta)$. □

Bemerkung 18.5.
$0 \in L(V,W)$; $L(V,W) \neq \emptyset$. Also $L(V,W) \subseteq$ Fkt (V,W) (Unterraum). Insbesondere ist $L(V,W)$ ein K-Vektorraum.

Satz 18.6.
V n-dim, W m-dim über K. Dann ist dim $L(V,W) = mn$.

Beweis
$\mathcal{B} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ ist eine geordnete Basis von V und $\mathcal{B}' = (\beta_1, \ldots, \beta_m)$ ist eine geordnete Basis von W. Für jedes (p,q) mit $1 \leq p \leq m$ und $1 \leq q \leq n$ definieren wir [mithilfe von Satz 17.8 und Bemerkung 17.9(2)] $E^{p,q}$ eine lineare Transformation:

$E^{p,q} : V \to W$ definiert für $j = 1, \ldots, n$

$$E^{p,q}(\alpha_j) := \begin{cases} 0 & j \neq q \\ \beta_p & j = q \end{cases} = \delta_{jq}\beta_p$$

Behauptung
$\{E^{p,q} : 1 \leq p \leq m$ und $1 \leq q \leq m\}$ bilden eine Basis für L.

Beweis
Sei $T : V \to W$ und $1 \leq j \leq n$. Schreibe $T(\alpha_j) = \sum_{p=1}^{m} A_{pj}\beta_p$ in $\mathcal{B}'$ für geeignete $A_{pj} \in K$.

Zwischenbehauptung: $T = \underbrace{\sum_p \sum_q A_{pq} E^{p,q}}_{:=U}$,

$$\begin{array}{lrcl} \text{weil} & U(\alpha_j) & = & (\sum_p \sum_q A_{pq} E^{p,q})(\alpha_j) \\ & & = & \sum_p \sum_q A_{pq} \delta_{jq} \beta_p \\ & & = & \sum_{p=1}^m A_{pj} \beta_p \\ & & = & T(\alpha_j) \end{array}.$$

Also $U(\alpha) = T(\alpha)$ für alle $\alpha \in V$ laut Bemerkung 17.9(1). Also $U = T$.

Also $\{E^{p,q} : 1 \leq p \leq m \text{ und } 1 \leq q \leq m\}$ erzeugen L.
Linear unabhängig ?

Sei $U = \sum_p \sum_q A_{pq} E^{p,q} = 0$ für $A_{pq} \in K$. Also gilt für alle $j = 1, \ldots, n$: $U(\alpha_j) = 0$ i.e. $\sum_{p=1}^m A_{pj} \beta_p = 0$. Nun ist $\{\beta_p : 1 \leq p \leq m\}$ linear unabhängig $\Rightarrow A_{pj} = 0$ für alle p und j. $\square$

Satz 18.7.
Seien V, W, Z Vektorräume über K und T, U lineare Transformationen.

$V \xrightarrow{T} W \quad W \xrightarrow{U} Z$.

Es gilt $V \xrightarrow{U \circ T} Z$ ist wieder linear.

Beweis
$(U \circ T)(c\alpha + \beta) = U(T(c\alpha + \beta)) = U(cT(\alpha) + T(\beta)) = cU(T(\alpha)) + U(T(\beta)) = c(U \circ T)(\alpha) + (U \circ T)(\beta)$ $\square$

Sonderfall
$V = W = Z$. Also hat $L(V, V)$ eine Vektorenmultiplikation $UT := U \circ T$.

Bezeichnung
Schreibe $T^0 := I$ (Identitätsabbildung)

$T^2 := T \circ T$

$T^n := T \circ \cdots \circ T$

19 Script zur Vorlesung: Lineare Algebra I

Prof. Dr. Salma Kuhlmann

Definition 19.1.
Sei $T : V \to W$ eine Abbildung. T ist invertierbar, wenn es eine Abbildung U gibt mit $U : W \to V$ und $U \circ T = Id_V$ und $T \circ U = Id_W$, wobei Id die Identitätsabbildung bezeichnet: $Id(x) = x$ für alle x.

Lemma 19.2.
T ist invertierbar $\Leftrightarrow$ T ist bijektiv.

Beweis
"$\Rightarrow$"

(1) $T(x_1) = T(x_2) \Rightarrow x_1 = (U \circ T)(x_1) = U(T(x_1)) = U(T(x_2))$
$= (U \circ T)(x_2) = x_2$, also ist T injektiv.

(2) $(T \circ U)(y) = y$, also $y = T(U(y))$ für alle $y \in W$, also ist T surjektiv.

"$\Leftarrow$"
T bijektiv $\Leftrightarrow$ für alle $y \in W$ existiert genau ein $x \in V$ mit $T(x) = y$. Setze $U(y) := x$. Also wird $U : W \to V$ eindeutig definiert durch $U(y) = x \Leftrightarrow T(x) = y$.

Berechne $U(T(x)) =?$. Setze $y := T(x)$. Also $U(T(x)) = x$.
Analog $T(U(y)) = y$. Also $U \circ T = Id_V$ und $T \circ U = Id_W$. $\square$

Bezeichnung 19.3.
T ist invertierbar $\Rightarrow$ U ist eindeutig definiert. Schreibe $U := T^{-1}$. Also $T^{-1}(y) = x \Leftrightarrow y = T(x)$.

Satz 19.4.
T ist linear und invertierbar $\Rightarrow$ T^{-1} ist linear und invertierbar.

Beweis
$T^{-1}\underbrace{(c\beta_1 + \beta_2)}_{:=Y} \stackrel{?}{=} \underbrace{cT^{-1}(\beta_1) + T^{-1}(\beta_2)}_{:=X}.$

$T^{-1}(Y) = X \Leftrightarrow T(X) = Y$. Also berechne $T(X) = T(cT^{-1}(\beta_1) + T^{-1}(\beta_2))$
$= cT(T^{-1}(\beta_1)) + T(T^{-1}(\beta_2)) = c\beta_1 + \beta_2$. $\square$

Satz 19.5.
Es seien $V \overset{G}{\to} W \overset{L}{\to} Z$ invertierbare Abbildungen. Dann ist $L \circ G : V \to Z$ invertierbar und $(L \circ G)^{-1} = G^{-1} \circ L^{-1}$.

Beweis
$(G^{-1} \circ L^{-1}) \circ (L \circ G) = G^{-1} \circ (L^{-1} \circ L) \circ G = G^{-1} \circ I \circ G = G^{-1} \circ G = I$. Andere: Analog. $\square$

Definition 19.6. und Bezeichnung
Sei V ein K-VR. $GL_K(V) := \{T \mid T : V \to V \text{ invertierbare lineare Abbildung}\}$.

Bemerkung 19.7.
Wir haben gerade gezeigt, dass $GL_K(V)$ mit der Verknüpfung $\circ$ eine Gruppe ist. $GL_K(V)$ ist die *allgemeine lineare Gruppe* (general linear group).

Satz 19.9.
$T : V \to W$ ist injektiv $\Leftrightarrow$ T bildet eine linear unabhängige Teilmenge von V auf eine linear unabhängige Teilmenge von W.

Beweis
"$\Rightarrow$"
Sei $\ker(T) = \{0\}$ (siehe Lemma 14.5) und $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ linear unabhängig in V. Zu zeigen: $T(\alpha_1), \ldots, T(\alpha_k)$ linear unabhängig.

Sei $c_1T(\alpha_1) + \cdots + c_kT(\alpha_k) = 0$. Also $T(c_1\alpha_1 + \cdots + c_k\alpha_k) = 0$. Also $c_1\alpha_1 + \cdots c_k\alpha_k \in \ker(T)$. Also $c_1\alpha_1 + \cdots + c_k\alpha_k = 0$; $\alpha_1, \ldots \alpha_k$ linear unabhängig $\Rightarrow c_1 = \cdots = c_k = 0$. $\square$

Korollar 19.10.
Sei $\dim(V) = \dim(W) = d$ und $T : V \to W$ eine lineare Abbildung. Es gilt T ist injektiv $\Leftrightarrow$ T ist surjektiv.

Beweis
Wir wenden den Dimensionssatz (Satz 18.2) an.
$d = \operatorname{rang}(T) + \dim\ker(T)$. Also T injektiv $\Leftrightarrow \ker(T) = \{0\} \Leftrightarrow$
$\dim\ker(T) = 0 \Leftrightarrow \operatorname{rang}(T) = d \Leftrightarrow \dim R_T = d \Leftrightarrow R_T = W \Leftrightarrow T$ surjektiv. $\square$

20 Script zur Vorlesung: Lineare Algebra I

Prof. Dr. Salma Kuhlmann

Kapitel 3: § 4 Matrix-Darstellung von linearen Transformationen

Ansatz
Seien V und W zwei K-Vektorräume mit $\dim(V) = n$ und $\dim(W) = m$. Sei $T : V \to W$ eine lineare Abbildung.
Seien $\mathcal{B} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ eine geordnete Basis für V und $\mathcal{B}' = (\alpha'_1, \ldots, \alpha'_m)$ eine geordnete Basis für W.

Definition 20.1.
T ist eindeutig bestimmt durch $T(\alpha_1), \ldots, T(\alpha_n) \in W$. Schreibe

$$[T(\alpha_j)]_{\mathcal{B}'} := \begin{pmatrix} A_{1j} \\ \vdots \\ A_{mj} \end{pmatrix} \text{ für } j = 1, \ldots, n$$

und setze

$$[T]_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} := \left(\begin{array}{c|c|c} [T(\alpha_1)]_{\mathcal{B}'} & \cdots & [T(\alpha_n)]_{\mathcal{B}'} \end{array} \right)$$

Diese $m \times n$-Matrix heißt die *Matrix-Darstellung von T bezüglich der Basen $\mathcal{B}$ und $\mathcal{B}'$*.

Welche Eigenschaften hat $[T]_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$?

Satz 20.2.
Es gilt für $\alpha \in V : [T(\alpha)]_{\mathcal{B}'} = [T]_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}[\alpha]_{\mathcal{B}}$ (∗)

Beweis
Setze $A := [T]_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = [A_{ij}]_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$

$$[\alpha]_{\mathcal{B}} := \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Nun ist $[T(\alpha_j)]_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} A_{1j} \\ \vdots \\ A_{mj} \end{pmatrix}$. Also ist $T(\alpha_j) = \sum_{i=1}^{m} A_{ij}\alpha'_i$.

Berechne nun:

$$T(\alpha) = T\left(\sum_{j=1}^{n} x_j\alpha_j\right) = \sum_{j=1}^{n} x_j T(\alpha_j) = \sum_{j=1}^{n} x_j \sum_{i=1}^{m} A_{ij}\alpha_i' = \sum_{i=1}^{m}(\sum_{j=1}^{n} A_{ij}x_j)\alpha_i'.$$

Es folgt: $[T(\alpha)]_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} A_{1j}x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} A_{mj}x_j \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$. □

Behauptung 20.3.
$(*)$ bestimmt die Matrix $[T]_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ eindeutig !

Satz 20.5.
Die Abbildung

$$\begin{array}{rcl} \rho : L(V,W) & \to & K^{m\times n} \\ T & \mapsto & [T]_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} \end{array}$$

ist eine Isomorphie von K-Vektorräumen.

Beweis
Ist ρ linear?
Berechne

$$\rho(cT_1+T_2) = [cT_1+T_2]_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = \big([(cT_1+T_2)(\alpha_1)]_{\mathcal{B}'} \mid \cdots \mid [(cT_1+T_2)(\alpha_n)]_{\mathcal{B}'}\big) =?$$

Nun haben wir

$$\overbrace{[(cT_1+T_2)(\alpha_j)]_{\mathcal{B}'}}^{j\text{-te Spalte von } \rho(cT_1+T_2)} = [cT_1(\alpha_j)+T_2(\alpha_j)]_{\mathcal{B}'} = \underbrace{c[T_1(\alpha_j)]_{\mathcal{B}'}}_{j\text{-te Spalte von } \rho(T_1)} + \underbrace{[T_2(\alpha_j)]_{\mathcal{B}'}}_{j\text{-te Spalte von } \rho(T_2)}$$

Also: Die j-te Spalte von $\rho(cT_1+T_2)$ ist gleich wie die j-te Spalte von $\rho(T_2)$ plus c-mal die j-te Spalte von $\rho(T_1)$. Also

$$\rho(cT_1+T_2) = c\rho(T_1)+\rho(T_2).$$

Ist ρ injektiv?
Sei $T \in L(V,W)$ mit $\rho(T) = 0_{m\times n}$.

Dann ist $[T(\alpha_j)]_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ für alle $j = 1,\ldots,n$.

Aber dann ist $T(\alpha_j) = 0$ für alle $j = 1,\ldots,n$. Also ist T identisch mit der Nullabbildung.
Daraus folgt auch, dass ρ surjektiv ist,
weil $mn = \dim L(V,W) = \dim K^{m\times n}$ (siehe ÜB). □

Sonderfall
Wir betrachten $T : V \to V$ ist ein linearer Operator und $\mathcal{B} = \mathcal{B}'$.

Definition 20.6. und Bezeichnung
Schreibe $[T]_{\mathcal{B},\mathcal{B}} := [T]_{\mathcal{B}}$ ist die *Matrixdarstellung des Operators in der Basis* $\mathcal{B}$. Hier gilt also die folgende Version von $(*)$:

$$[T(\alpha)]_{\mathcal{B}} = [T]_{\mathcal{B}}[\alpha]_{\mathcal{B}}.$$

Nun betrachten wir die Matrixdarstellung von Hintereinanderausführungen

$$V \xrightarrow{T} W \xrightarrow{U} Z \text{ und } V \xrightarrow{U \circ T} Z$$

Ansatz:

V, W, Z sind endlich dim K-Vektorräume. T, U sind lineare Abbildungen.
$\mathcal{B} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ ist eine Basis für V
$\mathcal{B}' = (\beta_1, \ldots, \beta_m)$ ist eine Basis für W
$\mathcal{B}'' = (\gamma_1, \ldots, \gamma_p)$ ist eine Basis für Z
Setze $A = [T]_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}, B = [U]_{\mathcal{B}',\mathcal{B}''}$ und $C = [U \circ T]_{\mathcal{B},\mathcal{B}''} =?$

Satz 20.7.
$C = BA$.

Beweis
$[T(\alpha)]_{\mathcal{B}'} \overset{(*)}{=} A[\alpha]_{\mathcal{B}}$ und $[U(T(\alpha))]_{\mathcal{B}''} \overset{(*)}{=} B[T(\alpha)]_{\mathcal{B}'}$.

Also $[(U \circ T)(\alpha)]_{\mathcal{B}''} = BA[\alpha]_{\mathcal{B}}$. $(*)$ erfüllt also die Matrix BA bezüglich $U \circ T$. Die Eindeutigkeit impliziert nun unsere Behauptung. $\square$

21 Script zur Vorlesung: Lineare Algebra I

Prof. Dr. Salma Kuhlmann

Kapitel 3: § 4 Matrix-Darstellung von linearen Transformationen

Ansatz
Wie in Vorlesung 20: V ist endlich-dimensional mit Dimension n; $\mathcal{B}$ ist eine geordnete Basis für V.

Korollar 21.1.
$\rho : L(V,V) \to K^{n\times n}$. $\rho(T) := [T]_{\mathcal{B}}$ ist ein K-Algebren Isomorphismus.

Beweis
ρ ist ein K-Vektorraum-Isomorphismus. Ferner gilt $\rho(T_1 \circ T_2) = \rho(T_1)\rho(T_2)$. □

Korollar 21.2.
Sei $T \in L(V,V)$. Es gilt: T ist invertierbar genau dann, wenn $[T]_{\mathcal{B}}$ invertierbar ist. In diesem Fall gilt ferner $[T^{-1}]_{\mathcal{B}} = [T]_{\mathcal{B}}^{-1}$.

Beweis
T ist invertierbar $\Leftrightarrow$ es existiert T^{-1} mit $T \circ T^{-1} = T^{-1} \circ T = Id$

$\Leftrightarrow [T \circ T^{-1}]_{\mathcal{B}} = [T^{-1} \circ T]_{\mathcal{B}} = [Id]_{\mathcal{B}}$

$\Leftrightarrow [T]_{\mathcal{B}}[T^{-1}]_{\mathcal{B}} = [T^{-1}]_{\mathcal{B}}[T]_{\mathcal{B}} = I_n$

$\Leftrightarrow [T]_{\mathcal{B}}^{-1} = [T^{-1}]_{\mathcal{B}}$. □

Ansatz
V endlich dim. $\mathcal{B} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ und $\mathcal{B}' = (\alpha'_1, \dots, \alpha'_n)$ sind zwei geordnete Basen für V. $T \in L(V,V)$.

Fragestellung
Was ist die Beziehung zwischen $[T]_{\mathcal{B}}$ und $[T]_{\mathcal{B}'}$?

Lösung
Satz 15.3 liefert eine invertierbare P, so dass für alle $\alpha \in V$ gilt
$[\alpha]_{\mathcal{B}} = P[\alpha]_{\mathcal{B}'}$ $\qquad (**)$

Und Satz 20.2 liefert eine eindeutige Matrix $[T]_{\mathcal{B}}$ so, dass für alle $\alpha \in V$:
$[T(\alpha)]_{\mathcal{B}} = [T]_{\mathcal{B}}[\alpha]_{\mathcal{B}}$ $\qquad (*)$.

Nun gilt $(**)$ für $T(\alpha) \in V$: $[T(\alpha)]_{\mathcal{B}} = P[T(\alpha)]_{\mathcal{B}'}$ $\qquad (***)$

$(*), (**)$ und $(***)$ liefern

$$[T]_{\mathcal{B}}P[\alpha]_{\mathcal{B}'} = P[T(\alpha)]_{\mathcal{B}'} \qquad \text{oder} \qquad (P^{-1}[T]_{\mathcal{B}}P)[\alpha]_{\mathcal{B}'} = [T(\alpha)]_{\mathcal{B}'}.$$

Also erfüllt $(P^{-1}[T]_{\mathcal{B}}P)$ die bestimmende matrizielle Gleichung $(*)$ bezüglich der Basis $\mathcal{B}'$. Die Eindeutigkeit von $[T]_{\mathcal{B}'}$ für die Erfüllung der $(*)$ liefert nun

$$[T]_{\mathcal{B}'} = P^{-1}[T]_{\mathcal{B}}P, \text{ wobei } P = \left(\begin{array}{c|c|c} [\alpha'_1]_{\mathcal{B}} & \cdots & [\alpha'_n]_{\mathcal{B}} \end{array} \right).$$

Bemerkung 21.3.
Betrachte die Abbildung $\pi : V \to V$. Diese lineare Abbildung ist eindeutig definiert durch die Angaben $\pi(\alpha_j) := \alpha'_j$ für alle $j = 1, \ldots, n$. Dieser Operator ist invertierbar, da er eine *Basis auf eine Basis abbildet* (Korollar 19.10 zu Satz 19.9). Somit ist die Matrix-Darstellung $[\pi]_{\mathcal{B}}$ invertierbar. Es ist

$[\pi]_{\mathcal{B}} = \big([\pi(\alpha_1)]_{\mathcal{B}} \mid \cdots \mid [\pi(\alpha_n)]_{\mathcal{B}}\big) = \big([\alpha'_1]_{\mathcal{B}} \mid \cdots \mid [\alpha'_n]_{\mathcal{B}}\big) = P.$

P heißt deshalb *Matrix der Basiswechsel*.

Wir haben bewiesen:

Satz 21.4.
(Ansatz wie oben)
$[T]_{\mathcal{B}'} = [\pi]_{\mathcal{B}}^{-1}[T]_{\mathcal{B}}[\pi]_{\mathcal{B}}$ oder $[T]_{\mathcal{B}'} = P^{-1}[T]_{\mathcal{B}}P$.

Definition 21.5.
Seien $A, B \in K^{n\times n}$. wir sagen B ist zu A *ähnlich*, falls es eine invertierbare $P \in K^{n\times n}$ gibt, so dass $B = P^{-1}AP$.

Wir haben in Satz 21.4 bewiesen:
Sind $B = [T]_{\mathcal{B}'}$ und $A = [T]_{\mathcal{B}}$ die Matrix-Darstellungen des Operators T bezüglich der Basen $\mathcal{B}'$ bzw. $\mathcal{B}$, dann ist B zu A ähnlich. Tatsächlich gilt auch die Umkehrung!

Satz 21.6.
B ist ähnlich zu A genau dann, wenn B und A denselben linearen Operator (begzüglich geeigneter Basen) darstellen.

Beweis

"$\Leftarrow$" Bereits gemacht.

"$\Rightarrow$" Sei nun $\mathcal{B}$ eine beliebige Basis. Sei T der eindeutig durch $[T]_{\mathcal{B}} = A$, d.h. $[T(\alpha)]_{\mathcal{B}} := A[\alpha]_{\mathcal{B}}$ definierte Operator. (∗)

Sei ferner P eine invertierbare Matrix so, dass $B = P^{-1}AP$. Sei $\mathcal{B}'$ die Basis, erhalten von $\underline{P}$, d.h. wofür

$$\underline{P} = \left([\alpha'_1]_{\mathcal{B}} \;\middle|\; \cdots \;\middle|\; [\alpha'_n]_{\mathcal{B}} \right)$$

sein sollte. Diese Angabe bestimmt also, dass

$$[\alpha'_j]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} P_{1j} \\ \vdots \\ P_{nj} \end{pmatrix}, \text{ d.h. } \alpha'_j := \sum_{i=1}^{n} P_{ij}\alpha_i.$$

Behauptung: Es gilt $[T]_{\mathcal{B}'} = B$. (ÜA, siehe ÜB). □

Exkurs

Definition: Sei $R \subseteq S \times S$ eine Relation.
Schreibe $xRy \Leftrightarrow (x, y) \in R$. R heißt Äquivalenzrelation, falls:

(1) xRx für alle $x \in S$ (Reflexivität);

(2) $xRy \Rightarrow yRx$ für alle $x, y \in S$ (Symmetrie);

(3) $xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz$ für alle $x, y, z \in S$ (Transitivität).

Satz 21.7.
B ähnlich A ist eine Äquivalenzrelation auf $K^{n\times n}$:

(1) $B = I_n^{-1} B I_n$

(2) $B = P^{-1}AP \Rightarrow A = PBP^{-1} = (P^{-1})^{-1}B(P^{-1})$
Setze $Q := P^{-1}$. Also $A = Q^{-1}BQ$

(3) $\left.\begin{matrix} B = P^{-1}AP \\ C = Q^{-1}BQ \end{matrix}\right\} \Rightarrow C = (PQ)^{-1}A(PQ)$

Mehr dazu im Übungsblatt.

22 Script zur Vorlesung: Lineare Algebra I

Prof. Dr. Salma Kuhlmann

Kapitel 3: § 5 Lineare Funktionale

Bemerkung 22.1.
$W = K^1$ ist ein K-Vektorraum. $\dim(W) = 1$. Die Standard-Basis ist (1). $W' \subseteq W$ ist ein Unterraum $\Rightarrow W' = \{0\}$ oder $W' = W$. Also $\dim W' = 0$ oder $\dim W' = 1$ und $\dim W' = 1$ genau dann, wenn $W' \neq \{0\}$.

Definition 22.2.
$f \in L(V, K)$ heißt ein *lineares Funktional.*

Beispiel 22.3.
$V = K^n$; $\mathcal{E}$ ist die Standard-Basis. Sei $(a_1, \dots, a_n) \in V$ fixiert.

Definiere $f : V \to K$ durch $f(x_1, \dots, x_n) := \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \qquad (*).$

Es gilt $f \in L(V, K)$ und $[f]_{\mathcal{E},(1)} = [a_1 \dots a_n]$. Umgekehrt sei $f \in L(V, K)$. Setze $a_j := f(\mathcal{E}_j)$, dann erfüllt f $(*)$ für $(a_1, \dots, a_n)$.

Allgemeiner sei $\dim V = n$ und $\mathcal{B} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ eine Basis.
Sei $(a_1, \dots, a_n) \in K^n$ fixiert.

Definiere $f : V \to K$ durch $f(\sum_{i=1}^{n} x_i \alpha_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i a_i. \qquad (*)$

Dann ist $f \in L(V, K)$ und $[f]_{\mathcal{B},(1)} = \big[[f(\alpha_1)]_{(1)} \mid \cdots \mid [f(\alpha_n)]_{(1)}\big] = \big([a_1]_{(1)} \mid \cdots \mid [a_n]_{(1)}\big) = [a_1 \dots a_n]$.

Und umgekehrt: $f \in L(V, K)$, setze $a_i = f(\alpha_i)$, dann ist f wie in $(*)$.

Beispiel 22.4.
$V = K^{n \times n}; \qquad tr : V \to K$

$tr(A) := \sum_{i=1}^{n} A_{ii}$ ist ein lineares Funktional.

Definition 22.6. und Notation
$V^* = L(V, K)$ heißt der *Dualraum*.
Sei nun $\dim V = n$.

Bemerkung 22.7.
$\dim V^* = \dim L(V, K) = n = \dim V$.

Also für jede Basis $\mathcal{B} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ für V werden wir nun eine Basis $\mathcal{B}^*$ von V^* zuordnen.
Satz 17.8 liefert für $i = 1, \dots, n$ ein eindeutig definiertes Funktional f_i mit $f_i(\alpha_) = \delta_{ij}$.

Behauptung
$(f_1, \dots, f_n)$ ist eine Basis für V^*. Es genügt zu zeigen, dass sie linear unabhängig sind.

Beweis
Für $f = \sum_{i=1}^{n} c_i f_i$ mit $c_i \in K$ gilt für alle $j = 1, \dots, n$:

$$f(\alpha_j) = \sum_{i=1}^{n} c_i f_i(\alpha_j) = c_j. \qquad (**)$$

Insbesondere wenn $f = 0$, dann gilt $f(\alpha_j) = 0$ für alle j, d.h. $c_j = 0$ für alle j. $\square$

Definition 22.8.
$\mathcal{B}^* = (f_1, \dots, f_n)$ heißt die *Dualbasis* zu $\mathcal{B}$.

Satz 22.9.
Sei $\dim V = n$ und $\mathcal{B} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ eine Basis für V. Es existiert genau eine (Dual)Basis $\mathcal{B}^* = (f_1, \dots, f_n)$ für V^*, so dass

(1) $f_i(\alpha_j) = \delta_{ij}$

(2) und $f = \sum_{i=1}^{n} f(\alpha_i) f_i$ für alle $f \in V^*$

(3) und $\alpha = \sum_{i=1}^{n} f_i(\alpha)\alpha_i$ für alle $\alpha \in V$.

Das heißt für alle $f \in V^*$ und für alle $\alpha \in V$ gilt:

$$[f]_{\mathcal{B}^*} = \begin{pmatrix} f(\alpha_1) \\ \vdots \\ f(\alpha_n) \end{pmatrix} \text{ und } [\alpha]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} f_1(\alpha) \\ \vdots \\ f_n(\alpha) \end{pmatrix} \text{ die sogenannte Dualität.}$$

Beweis

(1) Ergibt sich.

(2) $f \in V^* \Rightarrow f = \sum c_i f_i$ und $(**)$ liefert $c_j = f(\alpha_j)$ für alle $j = 1, \dots, n$.

(3) Analog: $\alpha = \sum x_i \alpha_i \Rightarrow f_j(\alpha) = f_j(\sum x_i \alpha_i) = x_j$. $\square$

23 Skriptskizze zur Vorlesung: Lineare Algebra I

Prof. Dr. Salma Kuhlmann

Kapitel 4: Determinante: eine Einführung

Die Determinanten werden in LA II ausfürlich behandelt (siehe Gesamtskript LA II: Kapitel II).

Erinnerung:

(i) $\det(a) = a \quad (1 \times 1 \text{ Determinante})$

$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc \quad (2 \times 2 \text{ Determinante})$

(ii) Für $n > 2$ wird die Determinante rekursiv wie folgt definiert:

Definition 23.1. Sei A eine $n \times n$ Matrix. Wir bezeichnen mit

(i) M_{ij} die Determinante der $(n-1) \times (n-1)$ Matrix, die wir erhalten, indem wir von A die i-te Zeile und die j-te Spalte von A streichen.

(ii) $C_{ij} := (-1)^{i+j} M_{ij}$ heißt der ij**-te Kofaktor** und M_{ij} der ij**-te Minor** oder der Minor $(n-1)$**-ter Ordnung** $(1 \leq i, j \leq n)$.

Beispiel 23.2. Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 2 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 8 \end{pmatrix}.$$

Wir berechnen

$$M_{11} = \det \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} = 16$$

Also $C_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = M_{11} = 16$. Analog

$$M_{32} = \det \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} = 26$$

und somit $C_{32} = (-1)^{3+2} M_{32} = -26$.

Definition 23.3. (Kofaktoren-Entwicklung)

$$\det(A) := a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + \ldots + a_{1n}C_{1n}$$

ist die *Kofaktoren-Entwicklung nach der* 1*-ten Zeile* der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad (*)$$

Beispiel 23.4. ($n = 3$) Aus

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} := \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$
$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

ergibt sich

$$\det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

Satz 23.5. Sei A eine $n \times n$ Matrix wie in $(*)$. $\forall i, j \in \{1, \ldots, n\}$ gilt:

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}C_{ij} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}C_{ij}$$

(d.h. $\det(A)$ ist auch gleich der Kofaktoren-Entwicklung nach der i-ten Zeile, beziehungsweise der j-ten Spalte).

Der Beweis von diesem wichtigen Satz wird ausführlich in der Vorlesung LA II behandelt. Hierfür werden wir die Theorie der multilinearen alternierenden Formen entwickeln.

Beachte jedoch: Man kann den Satz jetzt schon per Induktion nach n beweisen! Wir werden den Satz aber fürs Erste ohne Beweis als wahr annehmen. Wir werden viel Korollare folgern!

Korollar 23.6. Sei A eine $n \times n$ Dreiecksmatrix wie in $(*)$. Dann ist

$$\det(A) = \prod_{i=1}^{n} a_{ii} \quad \text{(Produkt der Diagonaleinträge)}$$

Beweis
Sei A ohne Einschränkung eine untere Dreiecksmatrix, d.h. $a_{ij} = 0$ für alle $1 \leq i, j \leq n$ mit $i < j$.
Beachte, dass jede Untermatrix wie in Definition 28.1 (i) wieder eine untere Dreiecksmatrix ist.
Wir beweisen das Korollar per Induktion nach n.
Anwenden von Definition 28.3 (Kofaktoren-Entwicklung nach der ersten Zeile) ergibt

$$\det(A) = a_{11}C_{11} + 0 + 0 + \ldots + 0 = a_{11}(-1)^2M_{11} = a_{11}M_{11}.$$

Nun ist M_{11} die Determinante der Untermatrix die wir erhalten, indem wir von A die erste Zeile und die erste Spalte streichen. Diese $(n-1) \times (n-1)$ Matrix ist wieder eine untere Dreiecksmatrix mit diagonalen Einträgen $a_{22} \ldots, a_{nn}$.
Die Induktionsannahme ergibt nun $M_{11} = \prod_{i=2}^{n} a_{ii}$, und somit ist

$$\det(A) = a_{11}\prod_{i=2}^{n} a_{ii} = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$$

Der Fall, in welchem A eine obere Dreiecksmatrix ist (d.h. $i > j \Rightarrow a_{ij} = 0$) wird analog bewiesen. $\square$
Korollar 28.6 enthält die Schlüsselidee zur Berechnung von Determinanten per Gauß-Verfahren (r.Z.s.F.), wie wir später in Satz 28.9 sehen werden.

Korollar 23.7. Wenn A eine Nullzeile enthält, dann ist $\det(A) = 0$.

Beweis
Sei die i-te Zeile die Nullzeile. Die Berechnung von $\det(A)$ per Entwicklung nach der i-ten Zeile gemäß Satz 28.5 ergibt

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} 0C_{ij} = 0.$$

□

Korollar 23.8. Es gilt $\det(A) = \det(A^t)$.

Beweis
Die Zeilen von A sind die Spalten von A^t. Die Behauptung folgt daher sofort aus Satz 28.5. □

Satz 23.9. (Auswirkung von Zeilenumformungen)
Sei A eine $n \times n$ Matrix und B die Matrix, die wir erhalten, indem wir genau eine elementare Zeilenumformung ausüben. Dann gilt:

(a) $\det(B) = -\det(A)$ (für Typ 1)

(b) $\det(B) = c\det(A)$ (für Typ 2, $c \in K^\times = K \setminus \{0\}$)

(c) $\det(B) = \det(A)$ (für Typ 3)

Den Beweis von Satz 28.9 werden wir ebenfalls in LA II führen. Man könnte den Satz auch jetzt schon per Induktion nach n beweisen. Im Folgenden werden wir ihn einfach als gegeben voraussetzen.

Korollar 23.10. Sei A eine $n \times n$ Matrix mit zwei verschiedenen Zeilen Z_i und Z_j, so dass $Z_i = cZ_j$ für ein $c \in K^\times$. Dann ist $\det(A) = 0$.

Beweis
Dies folgt aus Korollar 28.7 und Satz 28.9(c). □

Korollar 28.10 gilt auch fü Spalten anstatt Zeilen.

Beispiel 23.11. (Berechnung von $\det(A)$ per r.Z.s.F.)

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 3 & -6 & 9 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix} &= -\begin{vmatrix} 3 & -6 & 9 \\ 0 & 1 & 5 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix} \quad (\text{Typ 1}; Z_1 \leftrightarrow Z_2) \\
&= -3\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix} \quad (\text{Typ 2}; Z_1 : 3) \\
&= -3\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 10 & -5 \end{vmatrix} \quad (\text{Typ 3}; -2Z_1 + Z_3) \\
&= -3\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -55 \end{vmatrix} \quad (\text{Typ 3}; -10Z_2 + Z_3) \\
&= (-3)(-55)\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad (\text{Typ 2}; Z_3 : (-55)) \\
&= (-3)(-55)(1)(1)(1) \quad (\text{Korollar 28.6}) \\
&= 165
\end{aligned}$$