17 Script zur Vorlesung: Lineare Algebra I

Prof. Dr. Salma Kuhlmann

Kapitel 3: § 1 Lineare Transformationen

Definition 17.1.

(i) Seien V, W K-VR. Eine Abbildung $T : V \to W$ ist eine lineare Transformation wenn

$$\forall \alpha, \beta \in V, \forall c \in K : T(\alpha + c\beta) = T(\alpha) + cT(\beta)$$

(ii) Eine lineare Transformation $T : V \to V$ heißt linearer Operator.

Beispiel 17.2.

(i) $T = 0$.

(ii) $I(\alpha) = \alpha$ Identität

Beispiel 17.3.
$V :=$ Polynomiale Funktionen über K.
$f(x) = c_0 + c_1 x + \cdots + c_k x^k$

$(Df)(x) = c_1 + 2c_2 x + \cdots + kc_k x^{k-1}$
Ableitung Operator.

Beispiel 17.4.
Sei A eine $m \times n$-Matrix über K.

(a) $T : K^{n\times 1} \to K^{m\times 1}$
$T(X) := AX$

(b) $U : K^{1\times m} \to K^{1\times n}$
$U(\alpha) = \alpha A$

Beispiel 17.5.
P ist eine $m \times m$-Matrix; Q ist eine $n \times n$-Matrix.
$T : K^{m\times n} \to K^{m\times n}$

$T(A) := PAQ$ ist ein linearer Operator.

Bemerkung 17.7.
Lineare Abbildungen erhalten l. K.: $T(\sum_{j=1}^{n} c_j\alpha_j) = \sum_{j=1}^{n} c_j T(\alpha_j)$.

Satz 17.8.
Sei V ein endlich dim Vektorraum über K und W ein K-VR. Sei $\mathcal{B} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ eine geordnete Basis für V. Seien $\beta_1, \ldots, \beta_n$ beliebige Vektoren in W.
Es existiert eine einzige lineare Transformation $T : V \to W$ mit $T(\alpha_j) = \beta_j$
für alle $1 \leq j \leq n$. $(*)$

Beweis
Existenz: Sei $\alpha \in V$. $\alpha = \sum x_j\alpha_j$.
Definiere $T(\alpha) := \sum x_j\beta_j$. Insbesondere ist $(*)$ erfüllt.
Ist T linear?
Sei $\gamma = y_1\alpha_1 + \cdots + y_n\alpha_n$ und sei $c \in K$. Man hat:
$c\alpha + \gamma = (cx_1 + y_1)\alpha_1 + \cdots + (cx_n + y_n)\alpha_n$. Also

$T(c\alpha + \gamma) = (cx_1 + y_1)\beta_1 + \cdots + (cx_n + y_n)\beta_n$

$= (cx_1\beta_1 + y_1\beta_1) + \cdots + (cx_n\beta_n + y_n\beta_n)$

$= (cx_1\beta_1 + \cdots + cx_n\beta_n) + (y_1\beta_1 + \cdots + y_n\beta_n)$

$= c(x_1\beta_1 + \cdots + x_n\beta_n) + (y_1\beta_1 + \cdots + y_n\beta_n) = cT(\alpha) + T(\gamma)$

Eindeutigkeit: Seien $T, U : V \to W$ linear mit $T(\alpha_j) = \beta_j = U(\alpha_j)$.
Zu zeigen: $T(\alpha) = U(\alpha)$ für alle $\alpha \in V$.

Berechne:
$U(\alpha) = U(\sum c_j\alpha_j) = \sum c_j U(\alpha_j) = \sum c_j T(\alpha_j) = T(\sum c_j\alpha_j) = T(\alpha)$. □

Bemerkung 17.9.
Wir haben gezeigt:

(1) $T, U : V \to W$ lineare Transformation. Es gilt: $T = U$ genau dann, wenn $T(\alpha_j) = U(\alpha_j)$ für alle $1 \leq j \leq n$ für eine geordnete Basis $(\alpha_j; 1 \leq j \leq n)$ von V.

(2) Wenn wir die Werte $T(\alpha_j)$ kennen, dann können wir "T per Linearität fortsetzen".

Beispiel 17.10.
$V = \mathbb{R}^2, W = \mathbb{R}^3$.

$$\left.\begin{array}{lcl}\alpha_1 & = & (1,2)\\ \alpha_2 & = & (3,4)\end{array}\right\} \text{Basis für } V.$$

$\beta_1 = (3, 2, 1)$
$\beta_2 = (6, 5, 4)$

$T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$
$T(1, 2) = (3, 2, 1)$
$T(3, 4) = (6, 5, 4)$

$T(e_1) =?$
$e_1 = (1, 0) = (-2)(1, 2) + (3, 4)$
$T(e_1) = (-2)(3, 2, 1) + (6, 5, 4) = (0, 1, 2)$.

Kapitel 3: § 2 Bild und Nullraum (Kern)

Lemma 17.12.
Sei $T : V \to W$ eine lineare Tansformation.

(1) $T(V) := R_T = \{T(\alpha); \alpha \in V\}$

$= \{w \mid w \in W$ und es existiert ein $\alpha \in V$ mit $T(\alpha) = w\}$
ist ein Unterraum von W.

(2) $N := T^{-1}\{0\} := \{\alpha \mid \alpha \in V$ und $T(\alpha) = 0\}$.

$N := \ker(T)$ ist ein Unterraum von V.

Beweis

(1) $\beta_1, \beta_2 \in R_T; c \in K \Rightarrow c\beta_1 + \beta_2 \in R_T$?

$\beta_1 = T(\alpha_1) \qquad \beta_2 = T(\alpha_2)$

$T(c\alpha_1 + \alpha_2) = cT(\alpha_1) + T(\alpha_2) = c\beta_1 + \beta_2$.

$T(0) = 0 \in R_T$. Also $R_T \neq \emptyset$. R_T ist ein Unterraum.

(2) $\alpha_1, \alpha_2 \in N$

$T(c\alpha_1 + \alpha_2) = c0 + 0 = 0$. Also $c\alpha_1 + \alpha_2 \in N$. Auch $0 \in N$, so dass $N \neq \emptyset$. □

Definition 17.13.
Sei V endlich dim; $T : V \to W$ eine lineare Transformation.
rang $(T) :=$ dim R_T.