16 Script zur Vorlesung: Lineare Algebra I

Prof. Dr. Salma Kuhlmann

Erinnerung

(i) $y = (y_1 \ \cdots \ y_n)$.

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \qquad \alpha_i : i\text{-te Zeile.}$$

Es gilt: $yA = y_1\alpha_1 + \cdots + y_n\alpha_n$.

(ii) i-te Zeile von $BA = [i\text{-te Zeile von } B]A$

$$= (B_{i1} \ \cdots \ B_{in}) \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^n B_{ij}\alpha_j; \ 1 \leq i \leq n.$$

Also ist die i-te Zeile von BA eine lineare Kombination der Zeilen von A.

Korollar 16.1.
A $n \times n$ über K, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ die Zeilenvektoren von A linear unabhängig $\Rightarrow$ A invertierbar.

Beweis
$\mathcal{B} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ ist eine Basis für K^n, also schreibe Standard Basisvektor:
$e_i = \sum_{j=1}^n B_{ij}\alpha_j \quad 1 \leq i \leq n$.

Sei B die $n \times n$-Matrix mit B_{ij} als Koeffizienten. Betrachte die Matrix BA, die i-te Zeile von $BA = [i\text{-te Zeile von } B]A$, i.e. $(B_{i1} \ \cdots \ B_{in})A = \sum_{j=1}^n B_{ij}\alpha_j = e_i$. Also $BA = I_n$. $\square$

Für die Umkehrung siehe Übungsblatt.

Kapitel 2: § 5 Zeilenraum

Definition 16.2.

Sei $A = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ ---- \\ ---- \\ ---- \\ \alpha_m \end{pmatrix}$ $m \times n$ über K und $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in K^n$ Zeilenvektoren von A.

Der *Zeilenraum* von A ist span $\{\alpha_1, \dots, \alpha_m\} \subseteq K^n$ (Unterraum).

Der *Zeilenrang* von A ist die Dimension davon.

Satz 16.3.
Zwei zeilenäquivalente Matrizen A und B haben denselben Zeilenraum.

Beweis
Setzte $B = PA$; P invertierbar; A, B $m \times n$.
$A\ m \times n;\ B\ m \times n;\ P\ m \times m$
So $B = P\ A\ \leftarrow$ jede B-Zeile ist eine Linearkombination von A-Zeilen.
Also $A = P^{-1}B \leftarrow$ jede A-Zeile ist eine Linearkombination von B-Zeilen.
Also liegt jeder B-Zeilenvektor in span$\{\alpha_1, \dots, \alpha_m\}$ und umgekehrt.
Also Zeilenraum von A = Zeilenraum von B. □

Wir werden auch die Umkehrung von Satz 16.3 zeigen (siehe Übungsblatt). Dafür studieren wir den Zeilenraum von Matrizen in r.Z.S.F.

Satz 16.4.
Sei $R \not\equiv 0$ in r.Z.S.F. Dann bilden die Zeilenvektoren von R die ungleich 0 sind, eine Basis für den Zeilenraum von R (also Zeilenrang von $R = \sharp$ der Zeilen, die ungleich 0 sind).

Beweis

Seien $p_1, \dots, p_r$ die Zeilen $\neq 0$; $R = \begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_r \\ \vdots \end{pmatrix}$

Es ist klar, dass $p_1, \dots, p_r$ den Zeilenraum erzeugen. Wir zeigen nun lineare Unabhängigkeit (analog Beispiel 13.4 (d)).
Seien $k_1 < \cdots < k_r$ die Spaltenindexe (in der die Haupteinse der p_i erscheinen)
$c_1p_1 + \cdots + c_rp_r = c_1(0, \dots, 0, 1, \dots) + c_2(0, \dots, 0, 0, 1, \dots) + \cdots + c_r(0, \dots, 0, 1, \dots) = (0, \dots, 0)$
impliziert $c_1 = \cdots = c_r = 0$. □