

# 14 Script zur Vorlesung: Lineare Algebra I

Prof. Dr. Salma Kuhlmann

## Kapitel 2: § 4 Koordinaten

### Definition 14.1.

Sei  $V$  endlich dim.  $K$ -Vektorraum;  $\dim V = n$ .

Eine *geordnete Basis* ist ein  $n$ -Tupel  $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ ;  $\alpha_i \in V$ , so dass  $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$  eine Basis ist.

### Notation und Terminologie

Wir schreiben auch  $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$  ist eine geordnete Basis. (Wir werden nicht immer  $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  schreiben.)

### Lemma 14.2.

Sei  $V$  ein endlich dim.  $K$ -Vektorraum und sei  $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  eine geordnete Basis; sei  $\alpha \in V$ , dann existiert ein eindeutiges  $n$ -Tupel  $(x_1, \dots, x_n) \in K^n$  mit  $\alpha = \sum_{i=1}^n x_i \alpha_i$ .

### Beweis

$$\alpha = \sum z_i \alpha_i \Rightarrow \sum_{i=1}^n (x_i - z_i) \alpha_i = 0 \Rightarrow x_i - z_i = 0 \Rightarrow x_i = z_i, \text{ für alle } 1 \leq i \leq n. \quad \square$$

### Definition 14.3.

(1)  $x_i$  ist die  $i$ -te Koordinate von  $\alpha$  bezüglich  $\mathcal{B}$ .

(2)  $(x_1, \dots, x_n)$  ist das Koordinaten-Tupel von  $\alpha$  bezüglich  $\mathcal{B}$ .

### Definition 14.4.

$V, W$  sind  $K$ -Vektorräume.

(1)  $T : V \rightarrow W$  ist eine *lineare Abbildung* (oder *Transformation*), falls

(a)  $T(\alpha + \beta) = T(\alpha) + T(\beta)$

(b)  $T(c\alpha) = cT(\alpha)$ ;

$\alpha, \beta \in V; c \in K$ ;

(a) und (b) sind äquivalent zu:  $\forall \alpha, \beta \in V, \forall c \in K$

(c)  $T(c\alpha + \beta) = cT(\alpha) + T(\beta)$

### Bemerkung

$$\left. \begin{array}{l} T(0) = T(0 + 0) \\ T(0) = T(0) + T(0) \end{array} \right\} \Rightarrow T(0) = 0.$$

(2)  $T$  ist eine *Isomorphie* oder ein *Isomorphismus*, falls  $T$  ferner bijektiv ist.

### Notation

$$V \stackrel{T}{\simeq} W \text{ oder } V \simeq W$$

**Terminologie**

$V$  und  $W$  sind isomorph.

**Lemma 14.5.**

Sei  $T$  eine lineare Transformation. Dann ist  $T$  injektiv genau dann, wenn  $\forall \alpha (T(\alpha) = 0 \Rightarrow \alpha = 0)$ .

**Beweis**

“ $\Rightarrow$ ”  $T$  ist injektiv und  $T(\alpha) = 0 = T(0)$ . Also  $\alpha = 0$ .

“ $\Leftarrow$ ” Sei  $T(\alpha_1) = T(\alpha_2)$ , dann  $T(\alpha_1) - T(\alpha_2) = 0$ , i.e.  $T(\alpha_1 - \alpha_2) = 0$ .  
Also  $\alpha_1 - \alpha_2 = 0$  und  $\alpha_1 = \alpha_2$ . □

**Satz 14.6.**

Sei  $V$  ein  $K$ -Vektorraum,  $\dim V = n \Rightarrow V \simeq K^n$ .

**Beweis**

Sei  $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$  eine geordnete Basis. Definiere  $T : V \rightarrow K^n$

$$\alpha \mapsto \underbrace{(x_1, \dots, x_n)}$$

:= Koordinaten-Tupel von  $\alpha$  bezüglich  $\mathcal{B}$ .

$$\bullet T(\alpha + \beta) \stackrel{?}{=} T(\alpha) + T(\beta).$$

Sei  $\alpha = \sum x_i \alpha_i, \beta = \sum y_i \alpha_i, \alpha + \beta = \sum (x_i + y_i) \alpha_i$  eindeutig  $\Rightarrow T(\alpha + \beta) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n) = (x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = T(\alpha) + T(\beta)$ .

$$\bullet \text{Analog } T(c\alpha) = cT(\alpha).$$

$$\bullet T(\alpha) = (0, \dots, 0) \Rightarrow \alpha = 0, \text{ weil } x_1 = \dots = x_n = 0.$$

So  $T$  injektiv.

Sei  $(x_1, \dots, x_n) \in K^n$ . Setze  $\alpha := \sum x_i \alpha_i \in V$ . Es gilt  $T(\alpha) = (x_1, \dots, x_n)$ .

So  $T$  surjektiv. □

**Notation**

Koordinaten Spaltenmatrix von  $\alpha$  bezüglich  $\mathcal{B}$ :

$$[\alpha]_{\mathcal{B}} := \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$