

12 Script zur Vorlesung: Lineare Algebra I

Prof. Dr. Salma Kuhlmann

Kapitel 2: § 3 Basen und Dimension

Definition 12.1.

Sei V ein K -Vektorraum. $S \subseteq V$ ist *linear abhängig* (l.a.) über K , falls verschiedene $v_1, \dots, v_n \in S$ und skalaren $c_1, \dots, c_n \in K$ nicht alle Null existieren mit $c_1v_1 + \dots + c_nv_n = 0$.
 S ist linear *unabhängig* (l.u.) über K , falls S nicht linear abhängig ist (e.g. \emptyset ist linear unabhängig).

Konvention

Sei $S = \{v_1, \dots, v_n\}$ endlich. Wir sagen: v_1, \dots, v_n linear unabhängig / linear abhängig.

Bemerkung 12.2.

1. $S_1 \subseteq S_2$ und S_1 l. a. $\Rightarrow S_2$ l. a. also
2. $S_1 \subseteq S_2$ und S_2 l.u. $\Rightarrow S_1$ linear unabhängig.

Beispiel 12.3.

3. (i) $0 \in S \Rightarrow S$ l.a. (weil $1 \cdot 0 = 0$)
 (ii) $\{v\}$ ist linear abhängig genau dann, wenn $v = 0$
 (iii) $\{v_1, v_2\}$ ist linear abhängig genau dann, wenn $v_1 = cv_2$ für ein $c \in K$ oder $v_2 = 0$
4. S ist linear unabhängig genau dann, wenn jede endliche Teilmenge von S ist linear unabhängig, d.h. genau dann, wenn für verschiedene Vektoren $v_1, \dots, v_n \in S$ und alle $c_1, \dots, c_n \in K$ aus $\sum c_iv_i = 0$ folgt $c_i = 0$ für $1 \leq i \leq n$.

Beispiel 12.4.

$$\left. \begin{array}{l} v_1 = (3, 0, -3) \\ v_2 = (-1, 1, 2) \\ v_3 = (4, 2, -2) \\ v_4 = (2, 1, 1) \end{array} \right\} \in \mathbb{R}^3$$

$2v_1 + 2v_2 - v_3 + 0v_4 = 0 \Rightarrow$ l.a. über \mathbb{R} .

Beispiel 12.5.

Seien $\beta_1 = (1, 1, 2), \beta_2 = (1, 0, 1), \beta_3 = (2, 1, 3)$. Ist $\text{span}(\{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}) = \mathbb{R}^3$?

Sei $\underline{b} = (b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{R}^3$, können wir $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$ finden mit

$$(b_1, b_2, b_3) = c_1(1, 1, 2) + c_2(1, 0, 1) + c_3(2, 1, 3).$$

D.h.: Hat das LGS

$$\begin{array}{rcccc} c_1 & + & c_2 & + & 2c_3 & = & b_1 \\ c_1 & & & + & c_3 & = & b_2 \\ 2c_1 & + & c_2 & + & 3c_3 & = & b_3 \end{array}$$

eine Lösung für **jede** $b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{R}$?

Satz 9.8 \Rightarrow dies ist der Fall genau dann, wenn

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

invertierbar ist.

Beispiel 12.6.

$v_1 = (1, -2, 3), v_2 = (5, 6, -1), v_3 = (3, 2, 1)$ linear unabhängig?

Betrachte $c_1v_1 + c_2v_2 + c_3v_3 = 0$. Also homogene LGS:

$$\left. \begin{array}{l} c_1 + 5c_2 + 3c_3 = 0 \\ -2c_1 + 6c_2 + 2c_3 = 0 \\ 3c_1 - c_2 + c_3 = 0 \end{array} \right\} v_1, v_2, v_3 \text{ l.u., gdw es nur triviale Lösung gibt.}$$

Also v_1, v_2, v_3 sind linear unabhängig genau dann, wenn

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ -2 & 6 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

invertierbar ist (Satz 9.8).

Definition 12.7.

Sei V ein K -Vektorraum. Eine *Basis* für V ist eine linear unabhängige Teilmenge, die V erzeugt. V ist *endlich dimensional*, falls es eine endliche Basis für V gibt, i.e.

$S = \{v_1, \dots, v_n\} \subseteq V$ mit

- (i) S linear unabhängig
- (ii) $\text{span}(S) = V$.

Beispiel 12.8.

$V = K^n$. Die *Standardbasis* ist $\{e_i; i = 1, \dots, n\}$, wobei $e_i = (0, \dots, 1, 0, \dots, 0)$; $1 \rightarrow i$ -te Stelle.

Satz 12.9.

Sei V ein K -Vektorraum, so dass V endlich erzeugt ist, i.e.

$\exists \beta_1, \dots, \beta_m \in V$ mit $\text{span}(\{\beta_1, \dots, \beta_m\}) = V$. Dann ist jede linear unabhängige Teilmenge endlich und hat höchstens m Elemente.

Beweis

Wir zeigen: Hat $S \subseteq V$ mehr als m Elemente, dann ist S linear abhängig.

Seien $v_1, \dots, v_n \in S$; $n > m$ verschiedene Vektoren.

$\forall j = 1, \dots, n, v_j \in \text{span}(\{\beta_1, \dots, \beta_m\})$, also für $j = 1, \dots, n \exists A_{1j}, \dots, A_{mj} \in K$ mit

$$v_j = \sum_{i=1}^m A_{ij} \beta_i.$$

Wir analysieren nun lineare Kombinationen der v_j ; $1 \leq j \leq n$.

Für $x_1, \dots, x_n \in K$ berechne

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n x_j v_j &= \sum_{j=1}^n x_j \sum_{i=1}^m A_{ij} \beta_i = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m (A_{ij} x_j) \beta_i \\ &= \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n A_{ij} x_j \right) \beta_i \end{aligned}$$

(*)

Betrachte das homogene LGS in m Gleichungen und n Unbekannten x_1, \dots, x_n :

$$\sum_{j=1}^n A_{ij}x_j = 0 \quad 1 \leq i \leq m \quad (**)$$

$n > m$ also Satz (Korollar 7.2) impliziert, dass es nicht triviale Lösungen gibt.

Also $\exists x_1, \dots, x_n \in K$ nicht alle Null, so dass $\sum_{j=1}^n A_{ij}x_j = 0$ für alle $1 \leq i \leq m$.

Zurück in (*) ergibt l.a. der v_j ; $1 \leq j \leq n$. □