Universität Konstanz
Fachbereich
Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Salma Kuhlmann
Dr. Lorna Gregory

Algebraische Zahlentheorie
Übungsblatt 9

Alle Ringe seien kommutativ mit Eins.
Definition: Sei ∞ ein bezüglich $\mathbb{Z}$ neues Element. Wir defineren

$$x \leq \infty \text{ und } x + \infty = \infty + x = \infty \text{ für alle } x \in \mathbb{Z} \cup \{\infty\}.$$

Es sei K ein Körper. Dann heißt eine surjektive Funktion $v\colon K \to \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ eine **diskrete Bewertung**, wenn die folgenden Eigenschaften erfüllt sind:

(i) $v(ab) = v(a) + v(b)$

(ii) $v(a) = \infty \iff a = 0$

(iii) $v(a + b) \geq \min\{v(a), v(b)\}$

für alle $a, b \in K$. Der Unterring $R := \{a \in K \mid v(a) \geq 0\}$ heißt der **Bewertungsring** von v. Ein Ring R heißt ein **diskreter Bewertungsring** falls er der Bewertungsring einer diskreten Bewertung ist.

In diesem und dem nächsten Übungsblatt werden wir zeigen, dass ein Integritätsbereich genau dann ein Dedekindring ist, wenn er Noethersch ist und alle seine Lokalisierungen bezüglich maximalen Idealen diskrete Bewertungsringe sind.

Aufgabe 9.1

(a) Sei $p \in \mathbb{N}$ prim. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$v : \mathbb{Q} \to \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$$

definiert durch

$$v(p^n a/b) = n \text{ und } v(0) = \infty,$$

(wobei $n \in \mathbb{Z}$, $a, b \in \mathbb{Z}$ und p weder a noch b teilt) eine wohldefinierte diskrete Bewertung ist. Beschreiben Sie den Bewertungsring von v.

(b) Sei K ein Körper. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$v : K(x) \to \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$$

definiert durch

$$v(p/q) := \deg q - \deg p \text{ und } v(0) = \infty$$

wobei $p, q \in K[x] \backslash \{0\}$, eine wohldefinierte diskrete Bewertung ist.

Aufgabe 9.2

Seien K ein Körper, $v : K \to \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ eine diskrete Bewertung und R der zugehöriger Bewertungsring. Sei $t \in R$ mit $v(t) = 1$.

(a) Zeigen Sie, dass $r \in R$ genau dann eine Einheit ist, wenn $v(r) = 0$ ist.

(b) Zeigen Sie, dass jedes Element aus $R \backslash \{0\}$ von der Form $t^n u$ wobei $n \in \mathbb{N}_0$ und $u \in R^\times$ ist.

(c) Zeigen Sie, dass R ein Hauptidealbereich ist. Folglich ist R ganz abgeschlossen.

(d) Zeigen Sie, dass R genau ein Primideal außer $\{0\}$ hat.

Aufgabe 9.3

Sei R ein Hauptidealbereich mit einem einzigen von $\{0\}$ verschiedenen Primideal $\mathfrak{m} = \langle t \rangle$. Sei K der Quotientenkörper von R.

(a) Zeigen Sie, dass für jedes Element $x \in K^\times$ eindeutig bestimmte $n \in \mathbb{Z}$ und $u \in R^\times$ mit $x = t^n u$ existieren.

(b) Zeigen Sie, dass R ein diskreter Bewertungsring ist.

Hinweis: Betrachten Sie die Funktion $v : K \to \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ definiert durch $t^n u \mapsto n$ und $0 \mapsto \infty$ wobei $n \in \mathbb{Z}$ und $u \in R^\times$.

Aufgabe 9.4

Sei R ein noetherscher lokaler Integritätsbereich mit maximalem Ideal $\mathfrak{m} = \langle t \rangle$.

(a) Zeigen Sie, dass $\cap_{n=1}^{\infty} \mathfrak{m}^n = 0$ ist.

(b) Zeigen Sie, dass R einen Hauptidealbereich ist.

Hinweis: Zeigen Sie, dass für jedes $\{0\} \neq I \lhd R$ ein $n \in \mathbb{N}_0$ mit $I = \langle t^n \rangle$ existiert.

Abgabe **Montag, 01.07.2013** bis 12.00 Uhr in die Briefkästen bei F 411.
