Universität Konstanz
Fachbereich
Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Salma Kuhlmann
Dr. Lorna Gregory

Algebraische Zahlentheorie
Übungsblatt 7

Alle Ringe seien kommutativ mit Eins.

Aufgabe 7.1

Seien K ein Körper und L eine endlich separable Erweiterung von K mit $[L : K] = m$. Seien Ω die normale Hülle von L/K und $\sigma_1, ..., \sigma_m$ die paarweise verschiedene K-Einbettungen von L nach Ω. Zeigen Sie, dass falls $\beta_1, ..., \beta_m$ eine Basis für L/K ist, dann gilt

$$D(\beta_1, ..., \beta_m) = \det(\sigma_i \beta_j)^2.$$

Aufgabe 7.2

Seien $K = \mathbb{Q}(\sqrt[4]{3})$ und $L = \mathbb{Q}(\sqrt{3})$. Berechnen Sie $\mathsf{N}_{L/\mathbb{Q}}(\sqrt{3})$ und $\mathsf{N}_{K/\mathbb{Q}}(\sqrt{3})$. Berechnen Sie $\mathsf{Sp}_{L/\mathbb{Q}}(\sqrt{3})$ und $\mathsf{Sp}_{K/\mathbb{Q}}(\sqrt{3})$.

Aufgabe 7.3

Sei R ein ganz abgeschlossener Integritätsbereich mit Quotientenkörper K. Seien L eine separable Erweiterung von K mit $[L : K] = n$ und $B := \overline{R}^L$ der ganze Abschluß von R in L. Sei $\beta_1, ..., \beta_n \in B$ eine Basis für L/K. Seien $M := \sum_{i=1}^n R\beta_i$ und

$$M' := \{\alpha \in L \mid \mathsf{Sp}_{L/K}(\alpha\gamma) \in R \text{ für alle } \gamma \in M\}.$$

Zeigen Sie, dass

$$M \subseteq B \subseteq M'$$

gilt.

Aufgabe 7.4
Seien $L = \mathbb{Q}(\beta)$, $\beta \notin \mathbb{Z}$ ganz über $\mathbb{Z}$, $f := c_0 + c_1x + ... + c_nx^n \in \mathbb{Z}[x]$ das Minimalpolynom von β über $\mathbb{Q}$ und f' die Ableitung von f. Seien $\beta_1 = \beta, \beta_2, ..., \beta_n$ die paarweise verschiedene Nullstellen von f. Schreiben Sie

$$f = (x - \beta)(\alpha_0 + \alpha_1 x + ... + \alpha_{n-1}x^{n-1})$$

wobei $\alpha_0, ..., \alpha_{n-1} \in L$.
In Teil (a) und Teil (b) berechnen wir die zu $1, \beta, ..., \beta^{n-1}$ dual Basis bezüglich $B_{L/\mathbb{Q}}$. In Teil (c) und Teil (d) finden wir eine explizite Beschreibung von M' aus 7.3 wobei $R = \mathbb{Z}$, $K = \mathbb{Q}$ und $\beta_1 = 1, \beta_2 = \beta, ..., \beta_n = \beta^{n-1}$.

(a) Beweisen Sie, dass für $0 \leq r \leq n - 1$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{f(x)}{(x - \beta_i)} \frac{\beta_i^r}{f'(\beta_i)} = x^r$$

gilt.

Hinweis: Sei $g(x) := \sum_{i=1}^{n} \frac{f(x)}{(x-\beta_i)} \frac{\beta_i^r}{f'(\beta_i)} - x^r \in L[x]$. Zeigen Sie, dass $g(x)$ die Nullstellen $\beta_1, ..., \beta_n$ hat.

(b) Sei F/K eine endlich separable Erweiterung. Sei $p := a_0 + a_1x + ... + a_mx^m \in F[x]$. Wir definieren

$$\mathrm{Sp}_{F/K}(p) := \sum_{i=0}^{m} \mathrm{Sp}_{F/K}(a_i)x^i.$$

Zeigen Sie, dass für $0 \leq r \leq n - 1$

$$\mathrm{Sp}_{L/\mathbb{Q}}\left(\frac{f(x)}{(x - \beta)} \frac{\beta^r}{f'(\beta)}\right) = x^r$$

gilt. Folgern Sie, dass

$$\mathrm{Sp}_{L/\mathbb{Q}}\left(\beta^i \frac{\alpha_j}{f'(\beta)}\right) = \delta_{ij}$$

gilt.

(c) Zeigen Sie, dass

$$\frac{f(x)}{x - \beta} = \frac{f(x) - f(\beta)}{x - \beta} = \sum_{j=0}^{n-1} \left(\sum_{i=j+1}^{n} c_i \beta^{i-1-j}\right) x^j$$

gilt.

(d) Zeigen Sie, dass

$$\mathbb{Z}1 + \mathbb{Z}\beta + ... + \mathbb{Z}\beta^{n-1} = \mathbb{Z}\alpha_0 + \mathbb{Z}\alpha_1 + ... + \mathbb{Z}\alpha_{n-1}$$

gilt.

Hinweis: Verwenden Sie Teil (c) um die Determinante der Basisweschselmatrix von $(1, \beta, ..., \beta^{n-1})$ nach $(\alpha_0, ..., \alpha_{n-1})$ zu berechnen.

(e) Sei $M := \mathbb{Z}1 + \mathbb{Z}\beta + ... + \mathbb{Z}\beta^{n-1}$. Betrachten Sie M' aus 7.3 bezüglich der Basis $1, \beta, \beta^2, ..., \beta^{n-1}$. Folgern Sie, dass

$$M' = f'(\beta)^{-1} R[\beta]$$

gilt.

Abgabe **Montag, 17.06.2013** bis 12.00 Uhr in die Briefkästen bei F 411.
