**Universität Konstanz**
**Fachbereich**
**Mathematik und Statistik**
Prof. Dr. Salma Kuhlmann
Dr. Lorna Gregory

# Algebraische Zahlentheorie
## Übungsblatt 6

Alle Ringe seien kommutativ mit Eins.

**Aufgabe 6.1**
Ein Ring heißt **lokal** falls er genau ein maximales Ideal besitzt. Zeigen Sie, dass $R$ genau dann lokal ist, wenn $R\backslash R^\times$ ein Ideal ist.

**Aufgabe 6.2**
Seien $A, B$ Integritätsbereiche. Ein Homomorphismus $f : A \to B$ heißt **ganz**, wenn $f(A) \subseteq B$ eine ganze Ringerweiterung ist.
Seien $A, B$ Integritätsbereiche und $f : A \to B$ ein Homomorphismus. Sei $S$ eine multiplikative Untermenge von $A$ mit $0 \notin S$ und $0 \notin f(S)$.

(a) Zeigen Sie, dass $f(S)$ eine multiplikative Untermenge von $B$ ist.

(b) Definieren Sie $S^{-1}B := f(S)^{-1}B$ und

$$S^{-1}f : S^{-1}A \to S^{-1}B$$

durch $S^{-1}f(x/s) := f(x)/f(s)$. Zeigen Sie, dass $S^{-1}f$ ein Homomorphismus ist.

(c) Sei $f : A \to B$ ganz. Zeigen Sie, dass $S^{-1}f : S^{-1}A \to S^{-1}B$ ganz ist.

**Aufgabe 6.3**
Sei $R$ ein ganz abgeschlossener Integritätsbereich. Sei $S \subseteq R$ eine multiplikative Untermenge ohne Null. Zeigen Sie, dass $S^{-1}R$ ganz abgeschlossen ist.

**Aufgabe 6.4**
Sei $R$ ein Integritätsbereich. Sei $\mathcal{M}$ die Menge der maximalen Ideale.

(a) Zeigen Sie, dass $R = \cap_{\mathfrak{m}\in\mathcal{M}} R_\mathfrak{m}$ gilt.

**Hinweis**: Sei $r \in \cap_{\mathfrak{m}\in\mathcal{M}} R_\mathfrak{m}$. Betrachten Sie das Ideal

$$I_r := \{x \in R \mid rx \in R\} \lhd R.$$

(b) Sei $R$ ein Integritätsbereich und $\{R_i \mid i \in I\}$ eine Menge von ganz abgeschlossenen Unterringen von $R$. Zeigen Sie, dass $\cap_{i\in I} R_i$ ganz abgeschlossen ist.

(c) Zeigen Sie, dass $R$ genau dann ganz abgeschlossen ist, wenn für jedes $\mathfrak{m} \in \mathcal{M}$ der Ring $R_\mathfrak{m}$ ganz abgeschlossen ist.

---

Abgabe **Montag, 10.06.2013** bis 12.00 Uhr in die Briefkästen bei F 411.

---

http://www.math.uni-konstanz.de/~gregory/ANT.html