Universität Konstanz

Fachbereich
Mathematik und Statistik

Prof. Dr. Salma Kuhlmann
Dr. Lorna Gregory
Katharina Dupont

Lineare Algebra II
Übungsblatt 10

Aufgabe 10.1

(a) Sei

$$A := \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ -7 & -5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Finden Sie $P \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ so dass $P^{-1}AP$ in Jordan Normalform ist und geben Sie die Jordan Normalform von A an.

(b) Berechnen Sie die Jordan Normalform der folgenden komplexwertigen Matrix:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 10.2

(a) Seien $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{C}$. Sei $\phi : \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ definiert durch

$$\phi(x, y) := (\overline{y_1}, \overline{y_2}) \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

für $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in \mathbb{C}^2$. Zeigen Sie, dass (1) und (2) (aus der Definition des inneren Produktes im Skript) genau dann gilt, wenn $\alpha, \delta \in \mathbb{R}$ und $\gamma = \overline{\beta}$.

(b) Zeigen Sie, dass (3) (aus der Definition des inneren Produktes), $\alpha > 0$ und $\delta > 0$ impliziert.

(c) Zeigen Sie, dass eine Matrix

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \overline{\beta} & \delta \end{pmatrix}$$

entweder zwei verschiedene Eigenwerte hat, oder von der Form $\lambda \cdot I$ mit $\lambda \in \mathbb{C}$ und Einheitsmatrix I, ist.

(d) Zeigen Sie, dass ϕ (aus Teil (a)) genau dann ein inneres Produkt ist, wenn $\alpha, \delta \in \mathbb{R}$, $\alpha, \delta > 0$, $\gamma = \overline{\beta}$ und $\alpha\delta - \beta\overline{\beta} > 0$.

Hinweis: Betrachten Sie die Eigenwerte von

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie zunächst, dass die Eigenwerte reell sind, wenn ϕ ein inneres Produkt auf $\mathbb{C}^2$ ist. Sind die Eigenwerte positiv oder negativ?

Aufgabe 10.3

(a) Sei $||x||_1 := |x_1| + |x_2|$ für $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. Zeigen Sie, dass $||x||_1$ eine Norm auf $\mathbb{R}^2$ ist.

(b) Sei $||x||_\infty :=$ max$\{|x_1|, |x_2|\}$ für $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. Zeigen Sie, dass $||x||_\infty$ eine Norm auf $\mathbb{R}^2$ ist.

Aufgabe 10.4 Gram-Schmidt-Verfahren

(a) Sei $(\ |\ )$ das innere Standardprodukt auf $\mathbb{R}^4$, und seien $v_1 = (1, 1, 1, 1)$, $v_2 = (1, 2, 4, 5)$, $v_3 = (1, -3, -4, -2)$. Finden Sie eine Orthonormalbasis (bezüglich $(\ |\ )$) von $W :=$ span(v_1, v_2, v_3) mittels des Gram-Schmidt-Verfahrens.

(b) Sei $\{x_1, ..., x_n\}$ eine vollständige orthonormale Menge in einem inneren Produktraum und sei $y_i = \sum_{j=1}^{i} x_j$. Wir wenden das Gram-Schmidt Verfahren auf $y_1, ..., y_n$ an und erhalten neue Elemente $z_1, ..., z_n$. Drücken sie $z_1, ..., z_n$ als Linearkombination der x_i aus.

Aufgabe 10.5 Zusatzaufgabe für Interessierte

Die Normen $|| \ ||_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ und $|| \ ||_\infty : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ seien definiert wie in Aufgabe 10.3. Gibt es ein inneres Produkt $(\ | \ )_1$ auf $\mathbb{R}^2$ so dass für alle $x \in \mathbb{R}^2$ $(\ x|x \ ) = ||x||_1^2$? Gibt es ein Innerprodukt $(\ | \ )_\infty$ auf $\mathbb{R}^2$ so, dass für alle $x \in \mathbb{R}^2$ $(\ x|x \ ) = ||x||_\infty^2$?

Bei jeder Aufgabe sind bis zu 10 Punkte zu erreichen.
Abgabe **Montag, 09.07.2012** bis 10.00 Uhr in die Briefkästen bei F 411.
