Universität Konstanz

Fachbereich
Mathematik und Statistik

Prof. Dr. Salma Kuhlmann
Dr. Lorna Gregory
Katharina Dupont

Lineare Algebra II
Übungsblatt 1

Aufgabe 1.1
Es sei K ein Körper.
Erinnerung: Zwei K-Algebren $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ sind isomorph (als K-Algebren) falls es einen K-Vektorraum Isomorphismus $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ gibt mit $\varphi(\alpha_1\alpha_2) = \varphi(\alpha_1)\varphi(\alpha_2)$ für alle $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathcal{A}$.

(a) Zeigen Sie, dass die K-Algebra der formalen Potenzreihen, $K[[x]]$, ein Integritätsbereich ist.

(b) Es seien S, T isomorphe K-Algebren. Zeigen Sie, dass S genau dann ein Integritätsbereich ist, wenn T ein Integritätsbereich ist.

(c) Zeigen Sie dass der K-Vektorraum $\mathcal{A} := K^{\mathbb{N}_0}$ mit Multiplikation

$$(fg)_n := f_n g_n,$$

für $f, g \in \mathcal{A}$, eine K-Algebra mit Einheit ist.

(d) Sind $K[[x]]$ und $\mathcal{A}$ isomorph als K-Algebren?

Aufgabe 1.2
Sei K ein Körper.
Erinnerung: Ein Polynom $f = \sum_{i=0}^{n} c_i x^i$ mit $c_i \in K$ ist gleich null, wenn $c_i = 0$ für alle $0 \leq i \leq n$.

(a) Verwenden Sie die Lagrangesche Interpolationsformel um ein Polynom $f \in \mathbb{R}[x]$ mit $\deg f \leq 3$ und $f(-1) = 4$, $f(0) = 7$, $f(1) = 6$, $f(2) = 7$ zu finden.

(b) Sei $f \in K[x]$ ein Polynom mit $\deg f \leq n$. Seien weiter $t_0, t_1, ..., t_n \in K$ paarweise verschieden. Zeigen Sie, dass $f = 0$ gilt, falls $f(t_i) = 0$ für $0 \leq i \leq n$ ist.

Folgern Sie, dass falls $|K| \geq m + 1$ und $f \in K[x]$ ungleich null mit $\deg f \leq m$ sind, ein $c \in K$ mit $f(c) \neq 0$ existiert.

(c) Sei K jetzt endlich. Geben Sie ein Beispiel eines Polynomes $f \in K[x]$ mit $f \neq 0$ so, dass $f(c) = 0$ für alle $c \in K$.

Aufgabe 1.3
Sei K ein Körper.
Erinnerung: Seien V ein K-Vektorraum, $T \in \mathcal{L}(V, V)$ und $f \in K[x]$. Für ein Polynom $f := \sum_{i=0}^{n} c_i x^i$ mit $c_i \in K$ definieren wir $f(T) := \sum_{i=0}^{n} c_i T^i$ wobei $T^0 := Id_V$ und $T^i := T \circ T^{i-1}$.

(a) Sei $T : K^3 \to K^3$ der lineare Operator definiert durch

$$T(x_1, x_2, x_3) := (x_1, x_3, -2x_2 - x_3).$$

Sei $f \in K[x]$, das Polynom $f(x) := -x^3 + 2$.
Berechnen Sie $f(T)(x_1, x_2, x_3)$ für alle $x_1, x_2, x_3 \in K$.

(b) Seien $z_0, ..., z_m \in K$ paarweise verschieden und seien $w_0, ..., w_m \in K$. Zeigen Sie, dass es ein eindeutig bestimmtes Polynom mit $\deg f \leq m$ gibt, so dass

$$f(z_j) = w_j$$

für alle $0 \leq j \leq m$.

Aufgabe 1.4
Es sei K ein Körper.

(a) Sei $x := (0, 1, 0, ...) \in K[[x]]$. Zeigen Sie, dass

$$x^i = (0, ..., 0, \underbrace{1}_{i\text{-te Stelle}}, 0, ...).$$

(b) Zeigen Sie, dass die Multiplikation in $K[[x]]$ distributiv ist und dass für jedes $c \in K$ und alle $f, g \in K[[x]]$, gilt: $c(fg) = (cf)g$.

(c) Zeigen Sie, dass für alle $f, g \in K[x]$ mit $f + g \neq 0$,

$$\text{deg}(f + g) \leq \text{max}\{\deg f, \deg g\}.$$

(d) Zeigen Sie, dass für alle $f, g \in K[x]$ mit $\deg f, \deg g \neq 0$ und $\deg f \neq \deg g$,

$$\deg(f + g) = \max\{\deg f, \deg g\}.$$

Aufgabe 5.5 Zusatzaufgabe für Interessierte
Sei K ein Körper und sei $h \in K[x]$ vom Grad mindestens 1. Zeigen Sie, dass die Abbildung $\varphi_h : K[X] \to K[X]$, definiert durch $f \mapsto f(h)$, linear und injektiv ist. Zeigen Sie, dass φ_h genau dann ein Isomorphismus ist, wenn $\deg h = 1$ gilt.

Bei jeder Aufgabe sind bis zu 10 Punkte zu erreichen.
Abgabe **Montag, 30.04.2012** bis 10.00 Uhr in die Briefkästen bei F 411.
