

## 22. Script zur Vorlesung: Algebra (B III)

Prof. Dr. Salma Kuhlmann, Gabriel Lehéricy, Simon Müller

Vertretung: Gabriel Lehéricy

WS 2016/2017: 27. Januar 2017

### Kapitel 5: Beweise der Sylow-Sätze

#### Beweis von Sylow 1

Induktion nach  $|G|$ .  $|G| = 1$  - klar.

Induktionsannahme: Sylow 1 gilt für alle Gruppen der Ordnung  $< |G|$ .

Induktionsschritt: Wir werden "Cauchy's Satz" benutzen:

Sei  $G$  eine endliche abelsche Gruppe,  $p \in \mathbb{N}$  eine Primzahl und  $p \mid |G|$ . Dann existiert ein  $x \in G$  mit  $|x| = p$ .

Betrachte die Klassengleichung  $|G| = |C_G| + \sum_{y_i \notin C_G} [G : C(y_i)]$  und beachte, dass  $C := C_G$  abelsch ist. Zwei Fälle sind zu betrachten:

#### Fall 1

$p \nmid |C| \Rightarrow \exists j$  mit  $p \nmid [G : C(y_j)]$ . Aber  $p^k \mid |G| = [G : C(y_j)] \mid |C(y_j)|$ . Also  $p^k \mid |C(y_j)|$ . Nun ist  $|C(y_j)| < |G|$ , da  $y_j \notin C$  ist.

Induktionsannahme  $\Rightarrow C(y_j)$  besitzt eine Untergruppe der Ordnung  $p^k$ .

#### Fall 2

$p \mid |C| \Rightarrow$  Cauchy's Satz liefert ein Element  $c$  der Ordnung  $p$ .

Nun ist  $\langle c \rangle \triangleleft G$ ,  $|\langle c \rangle| = p$ . Betrachte die Gruppe  $G/\langle c \rangle$  der Ordnung  $\frac{|G|}{|\langle c \rangle|} = \frac{|G|}{p}$ . Also  $p^{k-1} \mid \frac{|G|}{p}$ .

Induktionsannahme  $\Rightarrow \exists$  eine Untergruppe von  $G/\langle c \rangle$  der Ordnung  $p^{k-1}$ . Nun haben die Untergruppen von  $G/\langle c \rangle$  die Gestalt  $H/\langle c \rangle$ , wobei  $H \leq G$  und  $\langle c \rangle \leq H$ .

Also existiert  $H \leq G$  mit  $|H/\langle c \rangle| = p^{k-1}$  und damit ist

$|H| = |H/\langle c \rangle| \cdot |\langle c \rangle| = p^{k-1} \cdot p = p^k$ . □

**Beweis von Sylow 2**

Wir benötigen eine

**Bemerkung**

Sei  $H \leq G$  und  $g \in G$ , dann ist  $gHg^{-1}$  auch eine  $\leq G$ . Also haben wir eine Aktion von  $G$  auf  $\Gamma :=$  die Menge der Untergruppen von  $G$  durch Konjugation.

- Für die Aktion berechnen wir  $(H \in \Gamma) \text{ Stab}_H := \{g \in G \mid gHg^{-1} = H\} := N(H)$  der Normalisator von  $H$  in  $G$ .
- Beachte:  $H \triangleleft N(H)$ .
- Wir berechnen die Bahnen  $\mathcal{O}_H = \{gHg^{-1} \mid g \in G\}, H \in \Gamma$ .  
Korollar 1 (letzte Vorlesung) liefert  $|\mathcal{O}_H| = [G : N(H)]$   
und  $[G : H] = [G : N(H)][N(H) : H]$ , so ist  $|\mathcal{O}_H| \mid [G : H]$ .
- Zum Spezialisieren dieser Aktion auf die Mengen  $\Pi \subseteq \Gamma$  der Sylow- $p$ -Untergruppen von  $G$ . Die Aktion auf  $\Pi$  ist wohldefiniert, weil  $gHg^{-1} \in \Pi$ , wenn  $H \in \Pi$ .

Wir bekommen ein:

**Hilfslemma**

- (i) Sei  $P \in \Pi, H \leq N(P)$  und  $|H| = p^j$ , dann ist  $H \leq P$ . Es folgt:  
(ii)  $P$  ist eine Sylow- $p$ -Untergruppe von  $N(P)$  und die einzige.

**Beweis**

$$\left. \begin{array}{l} H \leq N(P) \quad \text{und} \\ P \triangleleft N(P) \end{array} \right\} \Rightarrow HP \text{ ist Untergruppe und } HP/P \simeq H/(H \cap P)$$

(Isomorphie-Satz). Also ist  $HP/P$  isomorph zu einer Faktorgruppe von  $H$  und damit hat sie die Ordnung  $|HP/P| = p^k$  für ein geeignetes  $k$ . Also  $|HP| = p^k |P|$ . Da aber  $P$  eine Sylow- $p$ -Untergruppe ist, müssen wir  $k = 0$  haben, i.e.  $HP = P$ , so dass  $H \leq P$ . □

**Beweis von Sylow 2 - Fortsetzung**

Wir betrachten eine Bahn  $\Sigma$ .

**Fall 1**

Sei  $P \in \Sigma$  und betrachte die Aktion von  $P$  auf  $\Sigma$ . Wir bekommen eine Partition von  $\Sigma$  in  $P$ -Bahnen.

- Betrachte die Bahn von  $P$ . Die ist offensichtlich  $\{P\}$  (weil  $xPx^{-1} = P$  für alle  $x \in P$ ).
- Wir behaupten, dass  $\{P\}$  die einzige Bahn der Kardinalität 1 ist:  
Sei  $\{P'\}$  eine  $P$ -Bahn. Dann gilt  $xP'x^{-1} = P'$  für alle  $x \in P$ , das heißt  $P \subseteq N(P')$  und Hilfslemma (ii) liefert  $P = P'$  (weil  $P'$  die einzige Sylow- $p$ -Untergruppe von  $N(P')$  ist und  $P$  ist eine Sylow- $p$ -Untergruppe von  $N(P')$ ).
- Beachte, dass jede  $P$ -Bahnkardinalität eine Potenz von  $p$  hat, da diese Kardinalität die Kardinalität  $|P|$  teilen muss (siehe Korollar 1, letzte Vorlesung). Also ist  $|\Sigma| \equiv 1 \pmod{p}$ .

Dieses beweist die zweite Aussage von Sylow 2 (2).

Nun beweisen wir Sylow 2 (1). Wir zeigen, dass  $\Sigma$  die einzige Bahn ist, sonst gibt es  $P \in \Pi$  mit

**Fall 2**

$P \notin \Sigma$ . Betrachte wieder die Aktion von  $P$  auf  $\Sigma$ . Analog wie Fall 1 sehen wir, dass es überhaupt keine  $P$ -Bahnen der Kardinalität 1 gibt (die einzige Möglichkeit, nämlich  $\{P\}$  scheidet nun aus, weil  $P \notin \Sigma$  ist).

Also ist  $|\Sigma| \equiv 0 \pmod{p}$  - Widerspruch.

So  $\Sigma = \Pi$  und damit ist (1) bewiesen.

Es ist  $|\Pi| = [G : N(P)]$  für alle  $P \in \Pi$  (Korollar 1, letzte Vorlesung). Also ist die Anzahl der Sylow- $p$ -Untergruppen ein Divisor.

Das beweist die erste Aussage in Sylow 2 (2).

Nun beweisen wir Sylow 2 (3)

Sei  $H \leq G$ ,  $|H| = p^k$ . Betrachte die Aktion von  $H$  auf  $\Pi$ . Die  $H$ -Bahnen haben Kardinalität ein Divisor von  $|H|$  (Korollar 1, letzte Vorlesung), also haben die  $H$ -Bahnenkardinalität eine Potenz von  $p$ .

Nun ist aber  $|\Pi| \equiv 1 \pmod{p}$ , also gibt es eine  $H$ -Bahn  $\{P\}$  mit nur einem Element, das heißt  $H \leq N(P)$  und damit  $H \leq P$  (Hilfslemma (i)).  $\square$