

12. Script zur Vorlesung: Algebra (B III)

Prof. Dr. Salma Kuhlmann, Gabriel Lehericy, Simon Müller

WS 2016/2017: 6. Dezember 2016

Proposition 1

Sei \tilde{F} ein algebraischer Abschluss von F . Dann ist \tilde{F} algebraisch abgeschlossen.

Beweis

Sei $f(x) \in \tilde{F}(x)$; α ist Nullstelle von $f(x)$. Dann ist $\tilde{F}(\alpha)/\tilde{F}$ algebraisch und \tilde{F}/F algebraisch. Also ist auch $\tilde{F}(\alpha)/F$ algebraisch und damit ist auch α/F algebraisch.

Sei $m_{\alpha,F}$ das Minimalpolynom von α/F , dann zerfällt $m_{\alpha,F}$ in $\tilde{F}[x]$ und hat $(x - \alpha)$ als linearen Faktor. Es folgt $\alpha \in \tilde{F}$. \square

Sei F ein beliebiger Körper. Wir zeigen nun:

Satz 1

Es gibt eine algebraische abgeschlossene Körpererweiterung von F .

Beweis

Setze $F = K_0$. Wir definieren per Induktion nach $n \in \mathbb{N}_0$ eine ansteigende Folge

$$K_0 \subseteq \cdots \subseteq K_j \subseteq K_{j+1} \subseteq \cdots$$

von der Körpererweiterung, so dass jedes Polynom $f \in K_{j-1}[x]$ mit $\deg f \geq 1$ eine Nullstelle in K_j hat. Dann setzen wir $K := \bigcup K_j$.

K/F ist dann eine Körpererweiterung, wenn $f(x) \in K[x]$ ($\deg f \geq 1$), dann existiert ein j mit $f(x) \in K_j[x]$ und f hat eine Nullstelle in $K_{j+1} \subseteq K$. Also ist K algebraisch abgeschlossen.

Und nun zur Induktion:

Für $f(x) \in F[x]$ ($\deg f \geq 1$) sei x_f eine neue Variable. Betrachte $F[\cdots, x_f, \cdots]$ (Polynomring in der Variablen x_f) und das Ideal $I := \langle \{f(x_f); f \in F[x]\} \rangle$.

Behauptung

I ist echt. Sonst ist

$$1 = g_1 f_1(x_{f_1}) + \cdots + g_n f_n(x_{f_n}) (*)$$

mit $g_i \in F[\cdots, x_f, \cdots]$. Schreibe $x_i := x_{f_i}$ für $i = 1, \dots, n$ und seien x_{n+1}, \dots, x_m alle anderen Variablen, die unter den g_i 's noch vorkommen. Also ist

$$1 = g_1(x_1, \dots, x_m) f_1(x_1) + \cdots + g_n(x_1, \dots, x_m) f_n(x_n) (*)$$

eine polynomiale Gleichung.

Sei F'/F eine Körpererweiterung mit $\alpha_i \in F'$, Nullstelle für $f_i(x)$. Durch Einsetzen von α_i für x_i mit $i = 1, \dots, n$ und 0 für x_j mit $j = n+1, \dots, m$ in $(*)$ muss es immer noch eine Gleichung ergeben, die nun im Körper F' gelten muss, das heißt $1 = 0$ in F' - Widerspruch.

I ist echt. Sei \mathcal{M} maximal. $\mathcal{M} \triangleleft F[\cdots, x_f, \cdots]$ und $I \subseteq \mathcal{M}$. Setze $K_1 := F[\cdots, x_f, \cdots]/\mathcal{M}$. K_1/K_0 und $f \in K_0[x]$ hat eine Nullstelle in K_1 , weil $f(\bar{x}_f) = \overline{f(x_f)} = 0$ (da $f(x_f) \in I$). Wiederhole mit K_j/K_{j-1} und setze $K = \bigcup K_j$ wie schon erwähnt. \square

Korollar 1

\exists^Z : Sei K algebraisch abgeschlossen und $F \subseteq K$. Dann ist der relative algebraische Abschluss von F in K ein algebraischer Abschluss von F .

Eindeutigkeit: (Übungsaufgabe siehe Übungsblatt)

Ein algebraischer Abschluss von F ist bis auf Isomorphie eindeutig.

Beweis

Per Definition ist \tilde{F}/F algebraisch. Sei $f(x) \in F[x]$ ($\deg f \geq 1$), da K algebraisch abgeschlossen ist, $K[x] \ni f(x)$ zerfällt vollständig in lineare Faktoren $(x - \alpha)$ in $K[x]$. Aber α ist algebraisch über F und $\alpha \in K$, also $\alpha \in \tilde{F}$. Also zerfällt $f(x)$ in $\tilde{F}[x]$. \square

Kapitel 2: Separable und inseparable Körpererweiterung

Bemerkung

Sei $f(x) \in F[x]$, K/F ein Zerfällungskörper für f . Also $f(x) = (x - \alpha_1)^{n_1} (x - \alpha_2)^{n_2} \cdots (x - \alpha_k)^{n_k}$ in $K[x]$; $n_i \geq 1$; $\alpha_i \neq \alpha_j$ für $i \neq j$.

Definition 1

- n_i ist die *Vielfachheit* der Nullstelle α_i .
- α_i ist eine *mehrfache* Nullstelle, wenn $n_i > 1$, sonst ist
- α_i eine *einfache* Nullstelle.

Definition 2

- (1) $f(x) \in F[x]$ ($\deg f \geq 1$) ist *separabel*, wenn es nur einfache Nullstellen hat.
- (2) f nicht separabel heißt *inseparabel*.

Definition 3

$Df(x) = D(a_n x^n + \cdots + a_0) = na_n x^{n-1} + \cdots + a_1 \in F[x]$.

$D : F[x] \rightarrow F[x]$ ist ein *Ableitungsoperator* und erfüllt die Produktregel

$$Dfg = gDf + fDg.$$

Bemerkung

- (i) $\deg Df < \deg f$ immer !
- (ii) $f(x) = x^p \in F[x]$; p ist Primzahl; $\text{Char } F = p$. Dann ist $f(x) \neq 0$,
aber $Df(x) = px^{p-1} \equiv 0$.
- (iii) $f(x) \in F[x]$ ($\deg f \geq 1$) und $\text{Char } F = 0 \Rightarrow Df \neq 0$ (weil zum Beispiel $na_n \neq 0$, falls $a_n \neq 0$ ist).

Proposition 2

Sei $f(x) \in F[x]$ ($\deg f \geq 1$). Eine Nullstelle α für $f(x)$ ist eine mehrfache Nullstelle genau dann, wenn α auch eine Nullstelle für $Df(x)$ ist. Das heißt, dass die Menge { mehrfache Nullstelle von f } = { gemeinsame Nullstelle von f und Df } ist.

Beweis

“ \Rightarrow ” Sei α eine mehrfache Nullstelle. $f(x) = (x - \alpha)^n g(x)$ mit $n \geq 2$.

$$Df(x) = n(x - \alpha)^{n-1}g(x) + (x - \alpha)^n Dg(x); n - 1 \geq 1 \Rightarrow \alpha \text{ ist Nullstelle von } Df(x).$$

“ \Leftarrow ” Sei α eine gemeinsame Nullstelle von $f(x)$ und $Df(x)$.

$$\text{Schreibe } f(x) = (x - \alpha)h(x). \quad (*)$$

Also ist $Df(x) = h(x) + (x - \alpha)Dh(x)$. Beim Einsetzen von α für x , ergibt das $h(\alpha) = 0$.

$$\text{Zurück in } (*) \text{ ergibt es } f(x) = (x - \alpha)^2 h_1(x). \quad \square$$

Bemerkung

Die mehrfachen Nullstellen von f stimmen überein mit den gemeinsamen Nullstellen von f und DF , das heißt mit den Nullstellen von $\text{ggT}(f, Df)$.

Beweis

“ \Leftarrow ” α ist Nullstelle von $\text{ggT}(f, DF) \rightarrow \alpha$ ist Nullstelle von f und Df . Ist klar.

“ \Rightarrow ” Sei α eine Nullstelle von f und $DF \in F[x]$. Also gilt $m_{\alpha, F}/f$ und $m_{\alpha, F}/Df$ und damit $m_{\alpha, F}/\text{ggT}(f, Df)$ auch. Da α Nullstelle von $m_{\alpha, F}$, folgt nun α ist Nullstelle von ggT . \square

Korollar 2

$f \in F[x]$ ($\deg f \geq 1$) normiert ist separabel genau dann, wenn $\text{ggT}(f, Df) = 1$.

Beweis

“ \Leftarrow ” Folgt aus der Bemerkung.

“ \Rightarrow ” f separabel \Rightarrow keine gemeinsame Nullstelle mit $Df \Rightarrow \text{ggT}(f, Df) = 1$. \square