11. Script zur Vorlesung: Lineare Algebra I
Prof. Dr. Salma Kuhlmann, Dr. Merlin Carl
WS 2011/2012: 25. November 2011
(Dr. Merlin Carl in Vertretung)
(WS 2015/2016: Korrekturen vom 23. November 2015)

Kapitel 2: § 2 Unterräume

Definition 1 Sei V ein K-Vektorraum und $W \subseteq V$ eine Teilmenge. W ist ein *Teilraum*, falls $(W, +, \bullet)$ ein K-Vektorraum ist (mit der Einschränkung der Verknüpfung von V auf W i.e. es sollen gelten
$+ : W \times W \to W$ und $\bullet : K \times W \to W$ und auch die Vektorraumaxiome).

Dazu sind nachzurechnen:

$$\begin{array}{lllll} 0_V \in W; & \alpha, \beta \in W & \Rightarrow & \alpha + \beta \in W & \\ & c \in K, \alpha \in W & \Rightarrow & c\alpha \in W & . \\ \text{(insbesondere} & \alpha \in W & \Rightarrow & -\alpha \in W) & \end{array}$$

Also gibt es ein einfaches Kriterium.

Satz 1 Sei V ein K-Vektorraum, $\emptyset \neq W \subseteq V$ eine Teilmenge. Dann ist W ein Unterraum von V genau dann, wenn für alle $\alpha, \beta \in W, c \in K : \alpha + c\beta \in W$.

Beispiele

(1) Ist V ein K-Vektorraum, so sind V und $\{0_V\}$ Unterräume von V.

(2) $V = K^n$
$W := \{x_1, \ldots, x_n) \in K^n \mid x_1 = 0\}$ ist Unterraum, aber $X := \{(x_1, \ldots, x_n) \in K^n \mid x_1 = 1 + x_2\}$ nicht !
(E.g. $(0, \ldots, 0) \notin X$).

(3) Die Symmetrischen $n \times n$-Matrizen über K ($A_{ij} = A_{ji}$ für $1 \leq i, j \leq n$)
Seiten $A, B \in \text{Sym}_{n\times n}(K); c \in K$, dann ist
$(A + cB)_{ij} = A_{ij} + (cB)_{ij} = A_{ij} + cB_{ij} = A_{ji} + cB_{ji} = A_{ji} + (cB)_{ji} = (A + cB)_{ji}$.
Also $A + cB \in \text{Sym}_{n\times n}(K)$ wie gewünscht.

(4) Ein sehr wichtiges Beispiel!
Der Lösungsraum eines homogenen LGS: A sei eine $m \times n$-Matrix über K. Dann ist

$$\{x \in \text{Mat}_{n\times 1}(K) \mid Ax = 0\}$$

ein Unterraum von $\text{Mat}_{n\times 1}(K)$.

Beweis: Wir zeigen allgemeiner:
Ist $A \in \text{Mat}_{m\times n}(K), B, C \in \text{Mat}_{n\times p}(K), d \in K$, so ist
$A(B + dC) = AB + dAC$.

(4) Fortsetzung von Seite 1:
Dann
$[A(B+dC)]_{ij} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik}(B+dC)_{kj} = \sum A_{ik}(B_{kj} + (dC)_{kj})$
$= \sum A_{ik}B_{kj} + \sum A_{ik}(dC)_{kj} = \sum A_{ik}B_{kj} + \sum dA_{ik}C_{kj}$
$= (AB)_{ij} + d\sum A_{ik}C_{kj} = (AB)_{ij} + d(AC)_{ij}$.
Insbesondere:
Ist $AX_1 = AX_2 = 0$, so auch $A(X_1 + dX_2) = 0$. □

Definition 2 Sei V ein K-Vektorraum und $X \subseteq V$. Eine lineare Kombination von Elementen aus X ist eine (endliche) Summe $\sum_{v\in X} c_v v$ mit $c_v \in K$, wobei $c_v = 0$ für alle bis auf endliche viele v.

Damit können wir nun definieren

Definition 3 Sei V ein K-Vektorraum und $X \subseteq V$. Dann ist span(X), der von X *aufgespannte* oder *erzeugte* Unterraum, definiert als

$$\text{span}(X) := \{\sum_{v\in X} c_v v \mid c_v \in K \;\text{ und }\; c_v = 0 \text{ für alle bis auf endliche viele } v \in X\}.$$

Konvention: span $(\emptyset) = \{0\}$.

Proposition Für jede $X \subseteq V$ ist span (X) ein Unterraum.

Beweis span $\emptyset = \{0\}$. Sonst $X \neq \emptyset \Rightarrow$ span $(X) \neq 0$. Seien $\alpha = \sum_{v\in X} c_v v$, $\beta = \sum_{v\in X} d_v v \in$ span (X).
Sei $c \in K$. Also $\alpha + c\beta = \sum_{v\in X}(c_v + cd_v)v \in$ span (X). □

Es ist sogar der "kleinste" Unterraum der X enthält. Das ist unser nächstes Ziel .

Satz 2 Sei V ein $K-VR$, und χ eine Menge von Unterräumen. Dann ist $\bigcap \chi$ ein Unterraum von V.

Beweis $\bigcap \chi := \bigcap_{W\in\chi} W$.
$0_v \in W$ für alle $W \in \chi$ also $0_v \in \bigcap \chi \neq \emptyset$.
Sind $\alpha, \beta \in \bigcap \chi, c \in K$, so sind für jedes $W \in \chi$ auch $\alpha, \beta \in W$, also $\alpha + c\beta \in W$. Daraus folgt $\alpha + c\beta \in \bigcap \chi$. □

Es sei nun für $X \subseteq V$ $L(X)$ definiert als

$$L(X) := \bigcap \{W \subseteq V | W \text{ ist ein Unterraum und } X \subseteq W\}.$$

Satz 3 Für $X \subseteq V$ ist $L(X) =$ span (X).

Beweis $X = \emptyset . L(X) := \bigcap \{W \subseteq V | W \text{ Unterraum}\} = \{0\} = \text{ span } (\emptyset)$.
$X \neq \emptyset$:

(1) $L(X) \subseteq \text{ span } (X)$:
span $(X) \subseteq V$ ist ein Unterraum und $X \subseteq$ span (X). Also span $(X) \in \{W \subseteq V \mid W \text{ ein Unterraum und } X \subseteq W\}$.
Also $v \in L(X) \Rightarrow v \in \bigcap \{W \mid W \text{ ein Unterraum und } X \subseteq W\} \Rightarrow v \in$ span (X).

(2) span $(X) \subseteq L(X)$:
Sei $v \in$ span $(X), W \subseteq V$ ein Unterraum und $X \subseteq W$.
Da $v \in$ span (X), existiert $(c_x; x \in X)$ $(c_x \in K$ für alle $x \in X)$ mit $v = \sum_{x \in X} c_x\ x$, wobei $c_x = 0$ für alle bis auf endlich viele x. Da W ein Unterraum ist und $X \subseteq W$, ist $\sum_{x \in X} c_x\ x = v \in W$.

Da W beliebig war, ist v Element von jedem Unterraum mit diesen Eigenschaften, also auch des Durchschnitts. □

Wir können auch mehrere Unterräume zusammenfassen:

Definition 4 Seien $S_1, \ldots, S_k \subseteq V, V$ ein $K - VR$.
Dann ist $S_1 + \cdots + S_k := \{x_1 + \cdots + x_r \mid x_i \in S_i; 1 \leq i \leq k\}$
kurz auch $\sum_{i=1}^k S_i := \{\sum_{i=1}^k x_i \mid x_i \in S_i; 1 \leq i \leq k\}$.

Korollar 4 Seien $W_1, \ldots, W_k$ Unterräume von V. Dann ist $W := \sum_{i=1}^k W_i$ ein Unterraum von V und $W_i \subseteq W$ für $1 \leq i \leq k$.

Beweis Übungsaufgabe □

Korollar 5 Sind $W_1, \ldots, W_k$ Unterräme von V, so ist $W := \sum_{i=1}^k W_i = \text{ span } (\bigcup_{i=1}^k W_i)$.

Beweis

"$\subseteq$": Sei $v \in \sum W_i$. Also existiert $w_i, i \in \{1, \ldots k\}$ mit $w_i \in W_i$ und $v = \sum w_i$.
Dann $w_i \in \bigcup_{j=1}^k W_j$ für jedes $1 \leq i \leq k$.
Also $v = \sum w_i \in$ span $(\bigcup_{j=1}^k W_j)$.

"$\supseteq$": Sei $v \in$ span $(\bigcup W_i)$. Dann existiert $(c_i; i \leq k)$ und $(w_i \mid i \leq k)$ mit $c_i \in K; w_i \in W_i$, so dass $v = \sum c_i w_i$.
(Bemerkung: Aus jedem W_i können mehrere Elemente stammen. Die müssen wir dann erst zusammenfassen!)
Da W_i Unterräume sind, ist mit $w_i \in W_i$ auch $c_i w_i \in W_i$. Also existiert $(w_i' \mid i \leq k)$ mit $w_i' \in W_i$ und $v = \sum w_i'$ (nämlich $w_i' := c_i w_i$).
also $v \in \sum W_i$. □

Beispiel Sei $K \subseteq \mathbb{C}$ ein Teilkörper, ferner

$$\left.\begin{array}{lcl} \alpha_1 & := & (1,2,0,3,0) \\ \alpha_2 & := & (0,0,1,4,0) \\ \alpha_3 & := & (0,0,0,0,1) \end{array}\right\} \in K^5$$

$\alpha \in \operatorname{span}(\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\})$ genau dann, wenn $c_1, c_2, c_3 \in K$ existiert mit $\alpha = \sum_{i=1}^{3} c_i \alpha_i$, also hat α damit die Form $(c_1, 2c_1, c_2, 3c_1 + 4c_2, c_3)$
$\operatorname{span}(\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}) = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in K^5; x_2 = 2x_1, x_4 = 3x_1 + 4x_2\}$.