Inhaltsverzeichnis für das Gesamtskript[1] zur Vorlesung: Lineare Algebra II (SoSe2024)

Prof. Dr. Salma Kuhlmann

KAPITEL 0: PRÄLIMINARIEN.

§ 1 Annihilatoren

1. Script	Seite	1	(4)
2. Script	Seite	3	(6)

§ 2 Bi-Dual

2. Script	Seite	5	(8)
3. Script	Seite	7	(10)

§ 3 Die transponierte Abbildung

3. Script	Seite	8	(11)
4. Script	Seite	9	(12)

§ 4 Quotientenräume

5. Script	Seite	11	(14)

KAPITEL I: POLYNOMALGEBREN.

§ 1 Algebren

6. Script	Seite	15	(18)

§ 2 Die Polynomalgebra

6. Script	Seite	17	(20)
7. Script	Seite	18	(21)
8. Script	Seite	21	(24)

§ 3 Ideale

8. Script	Seite	22	(25)
9. Script	Seite	24	(27)

§ 4 Formale Ableitungen

9. Script	Seite	25	(28)
10. Script	Seite	27	(30)

§ 5 Primzerlegung (Primfaktorisierung)

10. Script	Seite	29	(32)

[1] Die Seitenzahlen in Klammern geben die Seitenzahl für die Suche mit Adobe Acrobat Reader an (unter dem Menü ANZEIGE – GEHE ZU – SEITE).

KAPITEL II: MULTILINEARFORMEN UND DETERMINANTEN.

§ 6 Die symmetrischen Gruppen S_n

11. Script	Seite	30	(33)
12. Script	Seite	33	(36)

§ 7 Multilineare Formen

13. Script	Seite	36	(39)

§ 8 Alternierende multilineare Formen

13. Script	Seite	37	(40)
14. Script	Seite	39	(42)
15. Script	Seite	43	(46)
16. Script	Seite	46	(49)

KAPITEL III: NORMALFORMEN.

§ 9 Eigenwerte und Eigenvektoren

17. Script	Seite	49	(52)
18. Script	Seite	53	(56)

§ 10 Annihilator Ideal

19. Script	Seite	56	(59)
20. Script	Seite	58	(61)

§ 11 Trigonalisierbarkeit

20. Script	Seite	60	(63)

§ 12 Invariante Unterräume

21. Script	Seite	61	(64)
22. Script	Seite	64	(67)

§ 13 Direkte Summen

23. Script	Seite	67	(70)

§ 14 Jordanketten

23. Script	Seite	69	(72)
24. Script	Seite	70	(73)

KAPITEL IV: EUKLIDISCHE UND UNITÄRE RÄUME.

§ 15 Innere Produkte

25. Script Seite 73 (76)
26. Script Seite 76 (79)

§ 16 Lineare Funktionale

26. Script Seite 78 (81)

§ 17 Hermite'sche Operatoren

27. Script Seite 80 (83)

§ 18 Cartesische Zerlegung eines Operators

27. Script Seite 81 (84)

§ 19 Isometrie

28. Script Seite 82 (85)

§ 20 Orthonormal-Basis wechseln

28. Script Seite 83 (86)

§ 21 Spektral-Theorie

28. Script Seite 84 (87)
29. Script Seite 85 (88)

§ 22 Orthonormale Diagonalisierung

29. Script Seite 86 (89)

§ 23 Anwendungen vom Spektralsatz

29. Script Seite 86 (89)

1 Script zur Vorlesung: Lineare Algebra II

Prof. Dr. Salma Kuhlmann

Kapitel 0: Präliminarien
§ 1 Annihilatoren

Definition 1.1.
Sei V ein K-Vektorraum $\dim V = n$, $S \subseteq V$.
Der Annihilator von S ist bezeichnet mit $S^0 \subseteq V^*$ und definiert als
$S^0 = \{f \in V^* \mid S \subseteq \ker(f)\} = \{f \in V^* \mid f(\alpha) = 0$ für alle $\alpha \in S\}$.

Bemerkung 1.2.

(*i*) $S_1 \subseteq S_2 \Rightarrow S_2^0 \subseteq S_1^0$

(*ii*) $S^0 = (\operatorname{span}(S))^0$

(*iii*) $S^0 \subseteq V^*$ ist immer ein Unterraum.

(*iv*) $\operatorname{span}(S) = \{0\} \Leftrightarrow S^0 = V^*$

(*v*) $S = V \Rightarrow S^0 = \{0\}$

(*vi*) Also $\operatorname{span}(S) = V \Leftrightarrow S^0 = \{0\}$

Beweis von (iv)
"$\Rightarrow$" ist klar.
Für "$\Leftarrow$": Sei $S^0 = V^*$. Zu zeigen $\operatorname{span}(S) = \{0\}$. Zum Widerspruch sei $\alpha \neq 0$ und $\alpha \in \operatorname{span}(S)$.
$\{\alpha\}$ ist linear unabhängig $\Rightarrow$ ergänze zu einer geord. Basis $\mathcal{B}$ für V:
$\mathcal{B} = (\alpha = \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$.
Sei $\mathcal{B}^*$ die Dualbasis: $\mathcal{B}^* = (f_1, \ldots, f_n)$. Es gilt $f_1(\alpha_1) = 1$, also $f_1 \notin S^0$. □

Beweis von (vi)
"$\Rightarrow$" folgt aus (ii) und (v).

"$\Leftarrow$" Sei $S^0 = \{0\}$. Zu zeigen $\operatorname{span}(S) = V$.
Zum Widerspruch setze $W := \operatorname{span}(S)$ und sei
$\alpha \in V \setminus W$ und $(\alpha_1, \ldots, \alpha_k) \subseteq W$ eine geord. Basis für W. Dann ist $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \alpha\}$ linear unabhängig.
Ergänze zu einer geord. Basis für V: $\mathcal{B} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \alpha = \alpha_{k+1}, \alpha_{k+2}, \ldots, \alpha_n)$.

Sei $(f_1, \ldots, f_k, f_{k+1}, \ldots, f_n) = \mathcal{B}^*$ die Dualbasis. Es gilt $f_{k+1}(\alpha_j) = 0$ für alle $j = 1, \ldots, k$ und $f_{k+1}(\alpha_{k+1}) = 1$. Also $f_{k+1} \not\equiv 0$ und $f_{k+1} \in S^0$. □

Korollar 1.3.
(Trennungseigenschaft)
Sei $W \subseteq V$ ein Unterraum und $\alpha \notin W$. Es existiert ein $f \in V^*$ mit $f(W) = \{0\}$ und $f(\alpha) \neq 0$.

Beweis
Sei $(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ eine geord. Basis für W. Nun ist $\alpha \notin \text{span}(\{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\})$, also ist $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \alpha\}$ linear unabhängig.
Ergänze zu einer geord. Basis für V: $\mathcal{B} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \alpha = \alpha_{k+1}, \ldots, \alpha_n)$ und sei $\mathcal{B}^* = (f_1, \ldots, f_k, f_{k+1}, \ldots, f_n)$ die Dualbasis. Setze $f := f_{k+1}$. □

Satz 1.4.
(Dimensionsformel für Annihilatoren)
Sei V ein endlich dimensionaler Vektorraum über K und $W \subseteq V$ ein Unterraum. Es gilt: $\dim W + \dim W^0 = \dim V$.

Beweis
Sei $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\}$ eine geord. Basis für W. Ergänze zu einer geord. Basis für V:
$\mathcal{B} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \alpha_{k+1}, \ldots, \alpha_n)$. Sei $\mathcal{B}^* = (f_1, \ldots, f_n)$ die Dualbasis.

Behauptung
$\{f_{k+1}, \ldots, f_n\}$ ist eine Basis für W^0.

Beweis
Es ist klar, dass $f_i \in W^0$ für alle $i \geq k+1$, weil $f_i(\alpha_j) = \delta_{ij} = 0$, falls $i \geq k+1$ und $j \leq k$. Also wenn $\alpha \in W$, ist α eine lineare Kombination von $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ und $f_i(\alpha) = 0$ für alle $i \geq k+1$. Also $f_i \in W^0$ für alle $i \geq k+1$ wie behauptet.

Nun ist$\{f_{k+1}, \ldots, f_n\}$ linear unabhängig (Teil einer Basis). Also genügt es zu zeigen, dass $\text{span}(\{f_{k+1}, \ldots, f_n\}) = W^0$.
Sei $f \in V^*$. Es gilt $f = \sum_{i=1}^n f(\alpha_i) f_i$ (allgemein). Ist aber $f \in W^0$, dann gilt $f(\alpha_i) = 0$ für alle $i \leq k$. Also gilt $f = \sum_{i=k+1}^n f(\alpha_i) f_i$. □

Korollar 1.5.
W_1, W_2 sind Unterräume von V. Es gilt: $W_1^0 = W_2^0 \Rightarrow W_1 = W_2$.

Beweis
Zum Widerspruch sei $W_1 \neq W_2$, zum Beispiel $\alpha \in W_2, \alpha \notin W_1$. Nach Korollar 1.3 existiert $f \in V^*$ mit $f(W_1) = \{0\}$ und $f(\alpha) \neq 0$. Also $f \in W_1^0$, aber $f \notin W_2^0$, ein Widerspruch. □

2 Script zur Vorlesung: Lineare Algebra II

Prof. Dr. Salma Kuhlmann

Beobachtung
Beziehung zu homogenen Gleichungssystemen

$$\text{Sei} \left\{ \begin{array}{rcl} A_{11}x_1 + \cdots + A_{1n}x_n & = & 0 \\ \vdots & & \\ A_{m1}x_1 + \cdots + A_{mn}x_n & = & 0 \end{array} \right\} \begin{array}{c} \text{homogenes Gleichungssystem} \\ \text{mit Koeffizienten in Körper } K \end{array} \qquad (*)$$

Definiere für $i = 1, \ldots, m$ ein Funktional auf K^n:

$f_i(x_1, \ldots, x_n) := \sum_{j=1}^{n} A_{ij}x_j.$

Es gilt: Lösungsraum von $(*) = \bigcap_{i=1}^{m} \ker(f_i)$ (folgt unmittelbar aus den Definitionen). Wir werden diese einfache Beobachtung ausnutzen, um Annihilatoren zu berechnen.

Beispiel 2.1.
$V = \mathbb{R}^5$; $W =$ span $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$, wobei gilt:
$\alpha_1 = (2, -2, 3, 4, -1)$,
$\alpha_2 = (-1, 1, 2, 5, 2)$,
$\alpha_3 = (0, 0, -1, -2, 3)$ und
$\alpha_4 = (1, -1, 2, 3, 0)$ ist.
Finde W^0.

Sei $f \in V^*$. Es gilt allgemein $f(x_1, \ldots, x_5) = \sum_{j=1}^{5} c_j x_j$.

Insbesondere: (homogenes Gleichungssystem in $c_1, \ldots, c_5$)

$$\begin{aligned} f \in W^0 \quad &\Leftrightarrow \quad f(\alpha_1) = f(\alpha_2) = \cdots = f(\alpha_4) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \sum_{j=1}^{5} A_{ij}c_j = 0 \text{ für } 1 \leq i \leq 4 \end{aligned}$$

wobei A_{ij} die Koeffizienten der Koeffizientenmatrix A des (HGS) i.e.

$$A := \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 & 4 & -1 \\ -1 & 1 & 2 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \text{ (GEV)} \Rightarrow \text{ r. Z. S. F. :}$$

$$\begin{array}{c} R = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \qquad\ \ c_1 \quad\ c_2 \quad\ c_3 \quad\ c_4 \quad\ c_5 \end{array}$$

c_1, c_3, c_5 sind Hauptvariablen und c_2 und c_4 sind freie Variablen.

Wie üblich finden wir den Lösungsraum für $\sum_{j=1}^{5} R_{ij} c_j = 0$ für alle $1 \leq i \leq 3$ i.e.

$$\begin{array}{ccccccc} c_1 & - & c_2 & - & c_4 & = & 0 \\ & & c_3 & + & 2c_4 & = & 0 \\ & & & & c_5 & = & 0 \end{array}$$

Setze $c_2 = a$ und $c_4 = b$ beliebig $\in \mathbb{R}$, dann sind

$c_1 = a + b, c_3 = -2b$ und $c_5 = 0$ und

$W^0 = \{f \mid f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (a+b)x_1 + ax_2 - 2bx_3 + bx_4, a, b \in \mathbb{R}\}$.

Es gilt $\dim W^0 = 2$.

Eine Basis für W^0 erhält man z.B. durch einsetzen von

$$\left.\begin{array}{lll} a = 1 & b = 0 & \text{und} \\ a = 0 & b = 1 & \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{lcl} f_1(x_1, \ldots, x_5) & = & x_1 + x_2 \\ f_2(x_1, \ldots, x_5) & = & x_1 - 2x_3 + x_4 \end{array}\right\} \text{ ist eine Basis für } W^0$$

$\square$

Kapitel 0: § 2 Bi-Dual

Sei V ein endlich dim Vektorraum über K.

Zwei Fragen haben wir noch nicht beantwortet:

(1) $V \longrightarrow V^*$
$\mathcal{B} \longmapsto \mathcal{B}^*$
Umkehrung? Sei $\mathbb{B}$ eine Basis für V^*. Existiert eine Basis $\mathcal{B}$ für V, so dass $\mathbb{B} = \mathcal{B}^*$?

(2) $V \longrightarrow V^*$
$W \longmapsto W^0$
Umkehrung? Sei U ein Unteraum von V^*. Existiert ein Unterraum W von V, so dass $U = W^0$?

Schlüssel
Wir betrachten $(V^*)^* = V^{**}$.

Bemerkung 2.2.
$\dim(V^{**}) = \dim V = \dim V^*$.

Definition 2.3. und Terminologie
Der Dualraum V^{**} zu V^* heißt der *Bi-Dualraum* zu V.

Proposition 2.4.
Sei $\alpha \in V$, α induziert kanonisch ein Funktional $L_\alpha \in V^{**}$ wie folgt:

$$L_\alpha : V^* \longrightarrow K$$

definiert durch

$$L_\alpha(f) := f(\alpha) \quad \text{für} \quad f \in V^*.$$

Beweis
$L_\alpha(cf + g) = (cf + g)(\alpha) = cf(\alpha) + g(\alpha) = cL_\alpha(f) + L_\alpha(g)$ □

Satz 2.5.
Die Abbildung $\begin{array}{rl} \lambda : & V \longrightarrow V^{**} \\ & \alpha \longmapsto L_\alpha \end{array}$ ist ein Isomorphismus.

Beweis
$\lambda(c\alpha + \beta) = c\lambda(\alpha) + \lambda(\beta)$?
Zu zeigen ist also $[\lambda(c\alpha + \beta)](f) = [c\lambda(\alpha) + \lambda(\beta)](f)$ für alle $f \in V^*$.

Wir berechnen:
$[\lambda(c\alpha+\beta)](f) = L_{c\alpha+\beta}(f) = f(c\alpha+\beta) = cf(\alpha)+f(\beta) = cL_\alpha(f)+L_\beta(f) = c\lambda(\alpha)(f)+\lambda(\beta)(f) = [c\lambda(\alpha) + \lambda(\beta)](f)$.

Also ist λ linear. Wir zeigen, dass λ bijektiv ist. Es genügt wegen $\dim V = \dim V^{**}$ zu beweisen: λ ist injektiv.

Sei $\lambda(\alpha) = 0$, i.e. $L_\alpha = 0$. Zu zeigen $\alpha = 0$.

Zum Widerspruch $\alpha \neq 0$, also ist $\{\alpha\}$ linear unabhängig.

Sei $\mathcal{B} = (\alpha = \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ eine geord. Basis für V und $\mathcal{B}^* = (f_1, \ldots, f_n)$ die Dualbasis. Es gilt $f_1(\alpha_1) = f_1(\alpha) = 1$. Also $L_\alpha(f_1) \neq 0$. Also $L_\alpha \not\equiv 0$, ein Widerspruch. $\square$

3 Script zur Vorlesung: Lineare Algebra II

Prof. Dr. Salma Kuhlmann

Ansatz wie in der 2. Vorlesung.

Korollar 3.1.
Sei L ein lineares Funktional auf V^*. Es existiert genau ein $\alpha \in V$ mit $L = L_\alpha$, i.e.
$$L(f) = f(\alpha) \text{ für alle } f \in V^*. \tag{$**$}$$

Beweis
Setze $\alpha := \lambda^{-1}(L)$. □

Korollar 3.2.
Sei $\mathbb{B}$ eine geord. Basis für V^*. Dann existiert eine geord. Basis $\mathcal{B}$ für V mit $\mathcal{B}^* = \mathbb{B}$.

Beweis
Setze $\mathbb{B} = (f_1, \ldots f_n)$. Satz 22.9 (LAI) liefert eine Dual-Basis zu $\mathbb{B}$;
$$\mathbb{B}^* := (L_1, \ldots, L_n) \text{ für} (V^*)^* = V^{**},$$
so dass $L_i(f_j) = \delta_{ij}$.

Korollar 3.1 liefert: Für alle i existiert genau ein $\alpha_i \in V$ mit $(**)$, i.e.
$$L_i(f) = f(\alpha_i) \text{ für alle } 1 \leq i \leq n; f \in V^*.$$

Insbesondere: $\delta_{ij} = L_i(f_j) = f_j(\alpha_i)$ für alle $1 \leq i \leq n$ und $1 \leq j \leq n$.
Setze nun $\mathcal{B} := (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$. □

Bemerkung 3.3.
Sei $E \subseteq V^*$, dann ist $E^0 \subseteq V^{**}$.
$$E^0 = \{L \in V^{**} \mid L(f) = 0 \text{ für alle } f \in E\}.$$
Wir berechnen:
$$\lambda^{-1}(E^0) = \begin{cases} \{ & \alpha \in V \mid \lambda(\alpha) \in E^0\} = \\ \{ & \alpha \in V \mid L_\alpha \in E^0\} = \\ \{ & \alpha \in V \mid L_\alpha(f) = 0 \quad \text{für alle} \quad f \in E\} = \\ \{ & \alpha \in V \mid f(\alpha) = 0 \quad \text{für alle} \quad f \in E\} \end{cases} \tag{$\dagger$}$$

Satz 3.4.
Sei $W \subseteq V$ ein Unterraum. Es gilt $\lambda^{-1}(W^{00}) = W$.

Beweis
$\dim W + \dim W^0 = \dim V = \dim V^* = \dim W^0 + \dim W^{00}$.
Dann gilt $\dim W = \dim W^{00} = \dim \lambda^{-1}(W^{00})$.
Es genügt nun zu zeigen, dass
$$W \subseteq \lambda^{-1}(W^{00}) = \{\alpha \in V \mid f(\alpha) = 0 \text{ für alle } f \in W^0\}$$
(siehe $(\dagger)$). Aber $\alpha \in W$, also $f(\alpha) = 0$ für alle $f \in W^0$ per Definition ! □

Korollar 3.5.
Sei $U \subseteq V^*$ ein Unterraum. Setze $W := \lambda^{-1}(U^0)$. Es gilt: $W^0 = U$.

Beweis
$\dim V^* = \dim U + \dim U^0 = \dim V = \dim W + \dim W^0$. Also $\dim U = \dim W^0$
(weil $\dim W = \dim \lambda^{-1}(U^0) = \dim U^0$).
Es genügt zu zeigen, dass $U \subseteq W^0$.
$W = \{\alpha \in V \mid f(\alpha) = 0 \text{ für alle } f \in U\}$ (siehe (†)). Sei $f \in U$, dann gilt $f(\alpha) = 0$ für alle $\alpha \in W$. Also $f \in W^0$ per Definition. □

Kapitel 0: § 3 Die transponierte Abbildung

Ansatz wie immer.
Sei $T : V \longrightarrow W$ eine lineare Transformation. T induziert eine Abbildung $T^t : W^* \longrightarrow V^*$ definiert durch $V^* \ni f := T^t(g) := g \circ T$ für $g \in W^*$, das heißt $f(\alpha) = (g \circ T)(\alpha) = g(T(\alpha))$ für alle $\alpha \in V$.

Behauptung
T^t ist linear: Für alle $c \in K; g_1, g_2 \in W^*$, berechne

$$\begin{aligned} T^t(cg_1 + g_2) &= (cg_1 + g_2) \circ T \\ &= c(g_1 \circ T) + (g_2 \circ T) \\ &= cT^t(g_1) + T^t(g_2). \end{aligned}$$

Wir haben bewiesen:

Satz 3.6.
Sei V, W ein (endlich dim) Vektorraum über K. Für jede lineare Abbildung $T : V \longrightarrow W$ existiert genau eine lineare Abbildung $T^t : W^* \longrightarrow V^*$, so dass $T^t(g)(\alpha) = g(T(\alpha))$ für alle $g \in W^*, \alpha \in V$.

4 Script zur Vorlesung: Lineare Algebra II

Prof. Dr. Salma Kuhlmann

Definition 4.1.
T^t ist die transponierte Abbildung zu T.

Satz 4.2.
Es gelten:

(0) $\ker(T^t) = (R_T)^0$
(Nullraum des tranponierten T^t = Annihilator von Bild T)

(1) Rang (T^t) = Rang (T)

(2) $R_{T^t} = (\ker(T))^0$
(Bild des transponierten T^t = Annihilator von Nullraum T)

Beweis

(0) $g \in \ker(T^t) \Leftrightarrow T^t(g) = 0 \Leftrightarrow g \circ T = 0 \Leftrightarrow g(T(\alpha)) = 0$ für alle $\alpha \in V \Leftrightarrow g \in (R_T)^0$

(1) Setze $\dim V = n$ und $\dim W = m$. $r :=$ Rang $(T) := \dim R_T$.
Satz 1.4 impliziert:
$\dim(R_T) + \dim(R_T)^0 = \dim W = m$.
Also $r + \dim(R_T)^0 = m \Rightarrow \dim(R_T)^0 = m - r$.
Aus (0) folgt nun: $\dim(\ker T^t) = m - r$. Nun ist $T^t : W^* \longrightarrow V^*$ und Satz 18.2 (LA I) liefert Rang $(T^t) + \dim(\ker T^t) = \dim W^* = m$. Also Rang $(T^t) = m - (m - r) = r$.

(2) Setze $N := \ker(T)$.
Behauptung: $R_{T^t} \subseteq N^0$.
Beweis: Sei $f \in R_{T^t}$. Also $f = T^t(g)$. $f \in V^*$ für ein $g \in W^*$.
Sei $\alpha \in N$ und berechne: $f(\alpha) = (g \circ T)(\alpha) = g(T(\alpha)) = g(0) = 0$.
Andererseits haben wir wieder
$$\dim N^0 = n - \dim N = \text{ Rang } (T) = \text{ Rang } (T^t)$$
(ergibt sich aus (1)).
Das heißt $R_{T^t} \subseteq N^0$ und $\dim R_{T^t} = \dim N^0$. Also $R_{T^t} = N^0$. □

Satz 4.3.
Seien V, W endlich dim Vektorräume über K. $T : V \longrightarrow W$ und $T^t : W^* \longrightarrow V^*$ sind lineare Abbildungen. Sei $\mathcal{B}$ eine geordnete Basis für V und $\mathcal{B}^*$ die Dualbasis und sei $\mathcal{B}'$ eine geordnete Basis für W und $(\mathcal{B}')^*$ die Dualbasis. Es gilt:
$$[T]^t_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = [T^t]_{(\mathcal{B}')^*,\mathcal{B}^*}.$$

Beweis
Erinnerung: Sei A eine $m \times n$-Matrix, dann ist A^t eine $n \times m$-Matrix und $(A^t)_{ij} = (A)_{ji}$.

Setze $A := [T]_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ und $B := [T^t]_{\mathcal{B}'^*,\mathcal{B}^*}$.
Sei $\mathcal{B} = (\alpha_1, \dots \alpha_n)$, $\mathcal{B}' = (\beta_1, \dots, \beta_m)$, $\mathcal{B}^* = (f_1, \dots, f_n)$ und $(\mathcal{B}')^* = (g_1, \dots, g_m)$.

Per Definition gilt:

$$T\alpha_j = \sum_{i=1}^{m} A_{ij}\beta_i \text{ für alle } j = 1, \ldots, n \qquad (*)$$

$$T^t g_j = \sum_{i=1}^{n} B_{ij} f_i \text{ für alle } j = 1, \ldots, m \qquad (**)$$

Wir berechnen nun

$$\big((T^t)(g_j)\big)(\alpha_i) = g_j(T(\alpha_i)) = g_j\big(\sum_{k=1}^{m} A_{ki}\beta_k\big) = \sum_{k=1}^{m} A_{ki} g_j(\beta_k) = \sum_{k=1}^{m} A_{ki}\delta_{jk} = A_{ji}.$$

Nun für ein beliebiges $f \in V^* : f = \sum_{i=1}^{n} f(\alpha_i) f_i$ (Darstellung zur Basis $\mathcal{B}^*$).

Speziell für $f = T^t g_j$ ergibt sich dann:

$$\sum_{i=1}^{n} B_{ij} f_i = T^t g_j = \sum_{i=1}^{n} T^t g_j(\alpha_i) f_i = \sum_{i=1}^{n} A_{ji} f_i.$$

Da $\mathcal{B}^*$ eine Basis ist, ist die Darstellung jedes f eindeutig, also $B_{ij} = A_{ji}$ wie behauptet. □

Wir geben nun als Anwendung einen sehr eleganten Beweis des Satzes, dass der Zeilenrang einer Matrix stets gleich ihrem Spaltenrang ist.

Erinnerung

(*i*) $Sr(A)$: *Spaltenrang von A* = Dimension des von den Spaltenvektoren von A aufgespannten Unterraumes.

(*ii*) $Zr(A)$: *Zeilenrang von A* = Dimension des von den Zeilenvektoren von A aufgespannten Unterraumes.

Satz 4.4.
K ist ein Körper. $A \in M_{m\times n}(K)$. Dann ist $Zr(A) = Sr(A)$.

Beweis
Es sei $\mathcal{E}_n$ die Standardbasis für $K^{n\times 1}$ und $\mathcal{E}_m$ die Standardbasis für $K^{m\times 1}$. $T : K^{n\times 1} \longrightarrow K^{m\times 1}$ gegeben durch

$$T\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}, \quad \text{wobei } y_i := \sum_{j=1}^{n} A_{ij} x_j.$$

Es ist $[T]_{\mathcal{E}_n,\mathcal{E}_m} = A$. (ÜA).
Offenbar ist $Sr(A) =$ Rang (T), denn Bild (T) besteht gerade aus den Linearkombinationen der Spaltenvektoren von A. Außerdem ist $Zr(A) = Sr(A^t)$, denn die Zeilen von A sind gerade die Spalten von A^t. Mit den Resultaten der letzten beiden Sätze folgt also:
$Sr(A) =$ Rang $(T) =$ Rang $(T^t) = Sr(A^t) = Zr(A)$, da $A^t = [T^t]_{\mathcal{E}_m^*,\mathcal{E}_n^*}$. □

Definition 4.5.
Rang $(A) := r(A) = Sr(A) = Zr(A)$.

5 Script zur Vorlesung: Lineare Algebra II

Prof. Dr. Salma Kuhlmann

Kapitel 0: § 4 Quotientenräume

Es sei V ein K-Vektorraum und $W \subseteq V$ ein Unterraum.

Definition 5.1.
Für alle $\alpha, \beta \in V$ gilt $\alpha \equiv \beta \mod W$ (Kongruenz: α kongruent zu β modulo W), falls $\alpha - \beta \in W$.

Lemma 5.2.
$\equiv \mod W$ ist eine Äquivalenzrelation auf V.

Beweis

(1) Reflexiv: $\alpha - \alpha = 0 \in W$

(2) Symmetrisch: $\alpha - \beta \in W \Rightarrow -(\alpha - \beta) = \beta - \alpha \in W$

(3) Transitiv: Sind $\alpha - \beta \in W$ und $\beta - \gamma \in W$,
so auch $\alpha - \gamma = (\alpha - \beta) + (\beta - \gamma) \in W$. □

Definition 5.3.
Zu $\alpha \in V$ heißt

$$[\alpha]_W := \{\beta \in V \mid \alpha \equiv \beta \mod W\}$$

die Restklasse (oder Nebenklasse) von α mod W.
$\{[\alpha]_W \mid \alpha \in V\}$ heißen Restklassen von W.

Notation
$V/W := \{[\alpha]_W \mid \alpha \in W\}$.

Bemerkung 5.4.
Offenbar ist $[\alpha]_W = \{\alpha + \gamma \mid \gamma \in W\}$. Wir können daher für $[\alpha]_W$ auch $\alpha + W$ schreiben. Also ist $V/W := \{\alpha + W \mid \alpha \in V\}$.

Definition 5.5.

(1) $[\alpha]_W = \alpha + W$ ist die Nebenklasse von α mod W. Ein $\beta \in [\alpha]_W$ heißt *Repräsentant* der Äquivalenzklasse.

(2) $V/W :=$ Menge der Nebenklassen. Versehen mit einer Verknüpfung $+$:

$$(\alpha_1 + W) + (\alpha_2 + W) := (\alpha_1 + \alpha_2) + W$$

und einer Verknüpfung *Skalarmultiplikation*:

$$c \cdot (\alpha + W) := (c\alpha) + W \text{ für } c \in K.$$

Lemma 5.6.
Diese Verknüpfungen sind wohldefiniert, unabhängig von der Wahl der Repräsentanten, i.e.

(a) $\alpha \equiv \alpha'$ mod W und $\beta \equiv \beta'$ mod $W \Rightarrow \alpha + \beta \equiv \alpha' + \beta'$ mod W

(b) $\alpha \equiv \alpha'$ mod W und $c \in K \Rightarrow c\alpha \equiv c\alpha'$ mod W.

Beweis

(a) $\alpha - \alpha' \in W$ und $\beta - \beta' \in W \Rightarrow \underbrace{(\alpha - \alpha')}_{\in W} + \underbrace{(\beta - \beta')}_{\in W} =$
$(\alpha + \beta) - (\alpha' + \beta') \in W \Rightarrow \alpha + \beta \equiv \alpha' + \beta'$ mod W.

(b) $\alpha - \alpha' \in W \Rightarrow c(\alpha - \alpha') \in W \Rightarrow c\alpha - c\alpha' \in W \Rightarrow c\alpha \equiv c\alpha'$ mod W. □

Lemma 5.7.
V/W mit diesen Verknüpfungen ist ein K-Vektorraum.

Beweis
ÜA: Was ist 0?
$0_{V/W} = 0 + W = W$ ist der Nullvektor in V/W.
Was ist eine additive Inverse?
$(\alpha + W) + \big((-\alpha) + W\big) = 0 + W = W = 0_{V/W}$. □

Notation und Bemerkung 5.8.
$\overline{\alpha} := \alpha + W$. Also

(i) $\overline{\alpha_1} + \overline{\alpha_2} = \overline{\alpha_1 + \alpha_2}$

(ii) $c\overline{\alpha_1} = \overline{c\alpha_1}$

(iii) $\overline{\alpha} = 0 \Leftrightarrow \alpha + W = W \Leftrightarrow \alpha \in W$

Satz 5.9.
(Die kanonische Projektion)
$\pi_W : V \twoheadrightarrow V/W$
$\pi_W(\alpha) := \overline{\alpha}$ ist eine surjektive lineare Tranformation mit $\ker(\pi_W) = W$.

Beweis
$\pi_W(c\alpha_1 + \alpha_2) = (c\alpha_1 + c\alpha_2) + W = (c\alpha_1 + W) + (c\alpha_2 + W) = c(\alpha_1 + W) + (\alpha_2 + W)$. Sei $\overline{\alpha} \in V/W$, dann ist $\overline{\alpha} = \pi_W(\alpha)$.
$\alpha \in \ker(\pi_W) \Leftrightarrow \overline{\alpha} = 0_{V/W} \Leftrightarrow \alpha + W = W \Leftrightarrow \alpha \in W$. □

Korollar 5.10.
$\dim W + \dim(V/W) = \dim V$.

Beweis
Folgt aus Dimensionssatz, LAI Satz 18.2 □

Satz 5.11.
(Homomorphiesatz)
Seien V, Z zwei K-Vektorräume und $T : V \longrightarrow Z$ linear. Es gilt:
$$V/\ker(T) \simeq R_T.$$

Beweis
Definiere $\overline{T} : V/\ker(T) \twoheadrightarrow R_T$ mit $\overline{T}(\alpha + \ker(T)) = \overline{T}(\overline{\alpha}) = T(\alpha)$.

(i) Ist $\overline{T}$ wohldefiniert ? $\overline{\alpha} = \overline{\alpha'} \Rightarrow T(\alpha) = T(\alpha')$?
$\alpha - \alpha' \in \ker(T) \Leftrightarrow T(\alpha - \alpha') = 0 \Leftrightarrow T(\alpha) = T(\alpha')$

(ii) Linear ?
$\overline{T}(\overline{\alpha_1} + \overline{\alpha_2}) = \overline{T}(\overline{\alpha_1 + \alpha_2}) = T(\alpha_1 + \alpha_2) = T(\alpha_1) + T(\alpha_2) = \overline{T}(\overline{\alpha_1}) + \overline{T}(\overline{\alpha_2})$.
Analog zeigt man: Für $c \in K$ und $\alpha \in V$ ist $\bar{T}(c\bar{\alpha}) = c\bar{T}(\bar{\alpha})$.

(iii) $T(\alpha) \in R_T$. Es ist $\overline{T}(\overline{\alpha}) = T(\alpha)$. Also ist $\overline{T}$ surjektiv.

(iv) $\overline{T}$ injektiv ?
$\overline{\alpha} \in \ker(\overline{T}) \Leftrightarrow \overline{T}(\overline{\alpha}) = 0 \Leftrightarrow T(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \alpha \in \ker(T) \Leftrightarrow \overline{\alpha} = 0$. So ist $\overline{T}$ injektiv. □

Korollar 5.12.
Seien W, W' Unterräume von V so dass $V = W \oplus W'$. Es gilt:
$$\frac{W \oplus W'}{W} \simeq W'$$

Beweis
$V = W \oplus W'$ bedeutet für alle $v \in V$, dass genau ein $w \in W$ und genau ein $w' \in W'$ existieren, so dass $v = w + w'$.
Definiere $P_{W'} : V \twoheadrightarrow W'; v \mapsto w'$.

ÜA: Ist $P_{W'}$ linear? Surjektiv?
$v \in \ker(P_{W'}) \Leftrightarrow P_{W'}(v) = 0 \Leftrightarrow w' = 0 \Leftrightarrow v \in W$.
Satz 5.11 $\Rightarrow V/\ker(P_{W'}) \simeq$ Bild $(P_{W'})$. □

Korollar 5.13.
Sei $W \subseteq V$ ein Unterraum. Es gilt:

$$(V/W)^* \simeq W^0$$

Beweis
Sei $\pi_W : V \twoheadrightarrow V/W$. Betrachte $\pi_W^t : (V/W)^* \to V^*$. Setze $T := \pi_W$.
Es folgt aus Satz 4.2 dass: $R_{T^t} = \big(\ker(T)\big)^0 = W^0$. $\ker(T^t) = (R_T)^0 = (V/W)^0 = \{0\}$.
Also ist T^t regulär und surjektiv auf W^0. □

Fragestellung
Sei $W \subseteq V$ ein Unterraum. Was ist die Beziehung zwischen W^* und V^* ?

Korollar 5.14.
Sei $W \subseteq V$ ein Unterraum. Es gilt:

$$W^* \simeq V^*/W^0$$

Beweis
$Id : W \longrightarrow V$ Identitätsabbildung
$Id^t : V^* \longrightarrow W^*$
Es folgt aus Satz 4.2 dass: $\ker(Id^t) = (R_{Id})^0 = W^0$
$R_{Id^t} = (\ker(Id))^0 = (\{0\})^0 = W^*$. □

Übungsaufgabe
Betrachte die Abbildung $\rho : V^* \longrightarrow W^*; \rho(f) := f/W$ (die Restringierung).
Ist ρ linear? Was ist $\ker(\rho)$? Was ist R_ρ?
Benutze Homomorphiesatz (nach der Berechnung von $\ker(\rho)$ und R_ρ). □

6 Script zur Vorlesung: Lineare Algebra II

Prof. Dr. Salma Kuhlmann

KAPITEL I: POLYNOMALGEBREN.

In Kapitel I werden wir die Polynomalgebra und ihre Eigenschaften näher kennenlernen. Diese Begriffe und Kenntnisse werden wir in dieser Vorlesung (insbesondere in Kapitel II und III) weiter benötigen.

§ 1 Algebren

Erinnerung 6.0.
Sei K ein Körper. Eine K-*Algebra* $\mathcal{A}$ ist ein K-Vektorraum mit einer Multiplikation von Vektoren:

$$\mathcal{A} \times \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$$
$$(\alpha, \beta) \longmapsto \alpha\beta,$$

so dass für alle $\alpha, \beta, \gamma \in \mathcal{A}$ und $c \in K$ gilt:

(a) $\alpha(\beta\gamma) = (\alpha\beta)\gamma$

(b) $\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$ und $(\alpha + \beta)\gamma = \alpha\gamma + \beta\gamma$

(c) $c(\alpha\beta) = (c\alpha)\beta = \alpha(c\beta)$

Falls es $1 \in \mathcal{A}$ gibt, so dass $1\alpha = \alpha 1 = \alpha$ für alle $\alpha \in \mathcal{A}$ gilt, dann heißt die Algebra eine *Algebra mit Einheit.*

Falls gilt $\alpha\beta = \beta\alpha$ für alle $\alpha, \beta \in \mathcal{A}$ heißt $\mathcal{A}$ eine *kommutative Algebra.*

Beispiel 6.1.
$\mathcal{A} := M_{n\times n}(K)$ ist eine nicht kommutative Algebra mit Einheit

Beispiel 6.2.
$\mathcal{A} := L(V, V)$ ist eine nicht kommutative Algebra mit Einheit

Beispiel 6.3. (Potenzreihen-Algebra)
Betrachte:
• $K^{\mathbb{N}_0} := \{f; f : \mathbb{N}_0 \to K, f \text{ Abbildung }\}$
• Schreibe $f = (f_n)_{n\in\mathbb{N}_0} = (f_0, f_1, \ldots)$
• Addition punktweise, i.e. $(f + g)_n := f_n + g_n$ $(*)$
• Skalarmultiplikation, auch punktweise : $(cf)_n := cf_n$
• Produkt: $(fg)_n := \sum_{i=0}^{n} f_i g_{n-i}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ $(**)$

Proposition 6.4.
$\mathcal{A} := K^{\mathbb{N}_0}$ mit den Verknüpfungen (wie in $(*)$ und $(**)$ erklärt) ist eine kommutative Algebra mit Einheit.

Beweis
• In Lineare Algebra I (Skript 13) haben wir die Axiome der K-Vektorräume für $K^{\mathbb{N}_0}$ bereits bewiesen. Wir berechenen nun:

• kommutatives Produkt: $(gf)_n = \sum_{i=0}^{n} g_i f_{n-i} = \sum_{i=0}^{n} g_{n-i} f_i = \sum_{i=0}^{n} f_i g_{n-i} = (fg)_n$.

• assoziatives Produkt:

$$\begin{aligned}\big[(fg)h\big]_n &= \sum_{i=0}^{n} (fg)_i h_{n-i} = \sum_{i=0}^{n} \Big(\sum_{j=0}^{i} f_j g_{i-j}\Big) h_{n-i} = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{i} f_j g_{i-j} h_{n-i} \\ &= \sum_{j=0}^{n} f_j \sum_{i=0}^{n-j} g_i h_{n-i-j} = \sum_{j=0}^{n} f_j \sum_{i=0}^{n-j} g_i h_{(n-j)-i} = \sum_{j=0}^{n} f_j (gh)_{n-j} \\ &= \big[f(gh)\big]_n.\end{aligned}$$

• Zeigen Sie dass $1 := (1, 0, \dots, 0, \dots)$ eine Einheit ist. Auch die übrigen Axiome (b) und (c) werden ihnen als ÜA, ÜB überlassen. □

Notation
$x := (0, 1, 0, \dots)$ $\qquad x^0 := 1 \qquad x^n := x \cdots x$ (n-mal)

Proposition 6.5.
(1) $x^k = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$ (1 ist die k-te Stelle) für alle $k \in \mathbb{N}_0$.

(2) $\{x^k \mid k \in \mathbb{N}_0\}$ sind linear unabhängig. Also ist $K^{\mathbb{N}_0}$ unendlich dim.

Beweis
Bereits in Linear Algebra I Korollar 13.5 geführt. □

Definition 6.6. und Notation
$\mathcal{A} = K^{\mathbb{N}_0}$ heißt die Algebra der Potenzreihen über K.
Sie wird bezeichnet als $\mathcal{A} := K[[x]]$.

Warum Potenzreihen? Formale Schreibweise: $f = \sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n$.

§ 2 Die Polynomalgebra

Notation
$K[x] := \text{span}\{x^k \mid k \in \mathbb{N}_0\}$

Definition 6.7.

1. $f \in K[x]$ heißt *Polynom über K*.
2. Sei nun $f \neq 0$, $f \in K[[x]]$. Es gilt: $f \in K[x]$ genau dann, wenn es genau ein $n \in \mathbb{N}_0$ exisitert mit $f_n \neq 0$ und $f_k = 0$ für alle $k > n$. Wir setzen $\deg f := n$, der *Grad von* f ist n.
3. Wenn $\deg f = n$, dann ist $f = f_0x^0 + f_1x^1 + \cdots + f_nx^n$; $f_n \neq 0$. Die f_i heißen *Koeffizienten von* f.
4. Ein Polynom dergestalt $f = f_0x^0$ ist ein *Skalarpolynom* ($\deg f = 0$ oder $f = 0$).
5. Ein Polynom $f \neq 0$ ist *normiert*, falls $\deg f = n$ und $f_n = 1$.

7 Script zur Vorlesung: Lineare Algebra II

Prof. Dr. Salma Kuhlmann

In diesem Skript werden wir zunächst Polynome als Potenzreihen mit endlichem Support wieder erkennen (also $K[x] \subset K[[x]]$). Wir werden dann diese Beobachtung ausnutzen um zu zeigen, dass K[x] ebenfalls eine kommutative Algebra mit Einheit ist. Danach werden wir Polynome als Funktionen ansehen. Wir untersuchen ganz genau die Beziehung zwischen das Polynom f und die Polynomfunktion $\tilde{f}$.

Bemerkung 7.0. $f \in K[[x]]$ definiere Support $f := \{n \in \mathbb{N}_0; f_n \neq 0\}$

(i) Support $f = \emptyset$ genau dann, wenn $f = 0$

(ii) Support f ist endlich genau dann, wenn $f \in K[x]$

(iii) $f \neq 0$. Support f endlich; es gilt deg $f =$ max Support f.

Satz 7.1.
Seien $f, g \in K[x]$ und $f, g \neq 0$. Es gelten:

(i) $fg \neq 0$

(ii) deg $(fg) =$ deg $f +$ deg g

(iii) fg ist normiert, falls f und g normiert sind

(iv) fg ist skalar $\Leftrightarrow$ f und g skalar sind

(v) Falls $f + g \neq 0$, gilt deg $(f+g) \leq$ max (deg f, deg g)

Beweis:
Sei deg $f := m$ und deg $g := n$. Wir erhalten vorab (aus der Definition des Produktes fg):
$fg = \sum_{s=0}^{m+n} \left(\sum_{r=0}^{s} f_r g_{s-r} \right) x^s$ für $f = \sum_{i=0}^{m} f_i x^i$ und $g = \sum_{i=0}^{n} g_i x^i$.
Insbesondere $cx^m dx^n = cdx^{m+n}$ und $fg = \sum_{0 \leq i \leq m} \sum_{0 \leq j \leq n} f_i g_j x^{i+j}$.

Behauptung: $(*)$ $\quad (fg)_{m+n} = f_m g_n$ und $(**)$ $\quad (fg)_{m+n+k} = 0$, für $k > 0$.

• Wir berechnen $(fg)_{m+n+k} = \sum_{i=0}^{m+n+k} f_i g_{m+n+k-i}$.

• Dafür untersuchen wir, welche Beträge ungleich Null sind:
• $f_i g_{m+n+k-i} \neq 0 \Rightarrow i \leq m, (f_i \neq 0)$ und $m + n + k - i \leq n$ also $m + k \leq i$.
• Das heißt: $f_i g_{m+n+k-i} \neq 0 \Rightarrow m + k \leq i \leq m$, i.e. $k = 0$ und $m = i$.
• Somit haben wir die Behauptung bewiesen.

• Nun implizieren $(*)$ und $(**)$ unmittelbar (i), (ii) und (iii).
• Auch (i) und (ii) implizieren (iv).
• (v): ÜA, ÜB. $\square$

Korollar 7.2.
$K[x]$ ist eine kommutative K-Algebra mit Einheit.

Beweis:
$K[x]$ ist ein Unterraum von $K[[x]]$. Es genügt also zu prüfen, dass $K[x]$ unter Produkten abgeschlossen ist, i.e. $f, g \in K[x] \Rightarrow fg \in K[x]$. Dieses folgt aus Satz 7.1 Punkt (ii). $\square$

Korollar 7.3.
$f, g, h \in K[x]; f \neq 0$. Aus $fg = fh$ folgt $g = h$.

Beweis:
$K[x]$ ist ein Integritätsbereich (siehe Satz 7.1 Punkt (i)). $\square$

Definition 7.4.
$f : K \longrightarrow K$ ist eine *polynomiale Funktion*, falls es $c_0, \dots, c_n \in K$ gibt, so dass $f(x) = c_0 + c_1 x + \cdots + c_n x^n$ für alle $x \in K$.

Eine polynomiale Funktion ist etwas anderes als ein Polynom. Wir werden die Beziehung nun genau analysieren. Dafür brauchen wir eine Definition:

Definition 7.5.
Sei $\mathcal{A}$ eine K-Algebra mit Einheit; sei $f \in K[x]$; schreibe $f = \sum_{i=0}^{n} f_i x^i$; $\alpha \in \mathcal{A}$.

Definiere $f(\alpha) := \sum_{i=0}^{n} f_i \alpha^i$ mit $\alpha^0 := 1$.

Beispiel 7.6.
Setze $\mathcal{A} = K$. Ein Polynom $f \in K[x]$ bestimmt also eine polynomiale Funktion

$$\begin{array}{rccl} \tilde{f}: & K & \longrightarrow & K; \\ & a & \longmapsto & \sum_{i=0}^{n} f_i a^i \in K. \end{array}$$

Beispiel 7.7.
$\mathcal{A} = M_{2\times 2}(K)$

$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad f = x^2 + 2$

$f(B) = 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}^2.$

Satz 7.8.
Seien $\mathcal{A}$ eine K-Algebra mit Einheit, $f, g \in K[x]; \alpha \in \mathcal{A}$ und $c \in K$. Es gelten

(i) $(cf + g)(\alpha) = cf(\alpha) + g(\alpha)$

(ii) $(fg)(\alpha = f(\alpha)g(\alpha)$

Beweis:
Übungsaufgabe

Beispiel 7.9.
Sei $\alpha \in \mathcal{A}$ fest.

$$\begin{array}{rccc} L_\alpha : & K[x] & \longrightarrow & K \\ & f & \longmapsto & f(\alpha) \end{array} \text{ ist eine lineare Funktionale.}$$

Notation
Sei $K[x]^\sim$ der K-Vektorraum der polynomialen Funktionen.

Der Beweis für folgende Proposition ist einfach:

Proposition 7.10.
Sei $K[x]^\sim$ der K-Vektorraum der polynomialen Funktionen. Wir versehen $K[x]^\sim$ mit der punktweisen Multiplikation: $\forall t \in K; (\widetilde{f g})(t) := \tilde{f}(t)\tilde{g}(t)$.
Dann ist $K[x]^\sim$ eine kommutative K-Algebra mit Einheit.

Beispiel 7.11.
Sei $K = \mathbb{F}_p$ für eine Primzahl p. Betrachte das Polynom $f = (x^p - x) \in K[x]$. Dann ist $f \neq 0$ (hat Koeffizienten ungleich 0). Es gilt jedoch, dass $\tilde{f} = 0$, i.e. $\tilde{f}$ ist die Nullabbildung.
E.g. $p = 3, f = x^3 - x = x^3 + 2x \in \mathbb{F}_3[x]$.

$f \neq 0$, weil $(f)_{n\in\mathbb{N}_0} = (0, 2, 0, 1, 0, \ldots, 0, \ldots) \neq (0, 0, 0, 0, \ldots, 0, \ldots)$.

Aber $f(0) = f(1) = f(2) = 0$ in $\mathbb{F}_3$. So ist $\tilde{f} : \mathbb{F}_3 \longrightarrow \mathbb{F}_3$ die Nullabbildung. Mehr dazu im Übungsblatt.

Wenn aber K unendlich ist, haben wir solche Beispiele nicht! Wir werden dieses in Skript 8 genau untersuchen.

8 Script zur Vorlesung: Lineare Algebra II

Prof. Dr. Salma Kuhlmann

In diesem Skript werden wir beweisen, dass die Algebren $K[x]$ (Polynome) und $K[x]^{\sim}$ (Polynomfunktionen) isomorph sind, wenn der Körper K unendlich ist. Wir werden für den Beweis die Lagrange Interpolationsformel brauchen. Für den Beweis der LIF werden wir wiederum Dualbasen (LA I Skript 22) benötigen. In Abschnitt 3 setzen wir unsere Untersuchung von $K[x]$ fort. Diese Resultate werden in Kapitel II, und insbesondere in Kapitel III benötigt.

Sei $V := K[x]_{\leq n}$ der K-Vektorraum der Polynome mit deg $\leq n$ (zusammen mit dem 0-Polynom). Wir bemerken: $\dim V = n+1$, weil e.g. $\{x^0, x^1, \ldots, x^n\}$ eine Basis bildet.

Satz 8.0. (Lagrange Interpolation):
Sei $n \in \mathbb{N}$. Sei K ein Körper, $t_0, t_1, \ldots, t_n \quad n+1$ verschiedene Elemente aus K.
Für $0 \leq i \leq n$ sei $L_i := L_{t_i}; L_i \in V^*$ so definiert: $L_i(f) := f(t_i)$.
Dann ist $\{L_0, \ldots, L_n\}$ eine Basis für V^*.

Beweis:
Es genügt eine duale Basis $\{P_0, \ldots, P_n\}$ von V zu finden. Solch eine Basis ist bestimmt durch die Gleichungen $L_j(P_i) = \delta_{ij} \qquad 0 \leq i, j \leq n.$ $\hfill (*)$
Wir wollen also $P_0, \ldots, P_n$ konstruieren, die $(*)$ erfüllen.
Wir definieren

$$P_i := \prod_{j \neq i} \left(\frac{x - t_j}{t_i - t_j} \right)$$

Prüfen Sie, dass diese tatsächlich $(*)$ erfüllen. (Siehe Übungsblatt). Darüberhinaus gilt fü alle $f \in V : f = \sum_{i=0}^{n} f(t_i) P_i.$ $\square$

Definition 8.1.
Seien $\mathcal{A}$ und $\tilde{\mathcal{A}}$ Algebren über K. Eine Bijektion $\sim: \mathcal{A} \longrightarrow \tilde{\mathcal{A}}; \alpha \mapsto \tilde{\alpha}$ ist eine *Algebren-Isomorphie*, falls $\widetilde{(c\alpha + d\beta)} = c\tilde{\alpha} + d\tilde{\beta}$ und $\widetilde{(\alpha\beta)} = \tilde{\alpha}\tilde{\beta}$ für alle $\alpha, \beta \in \mathcal{A},\ c, d \in K$ gelten.

In Definition 7.6 haben wir für ein Polynom $f \in K[x]$ die Polynomfunktion $\tilde{f}$ definiert. Wir beweisen nun:

Satz 8.2.
Sei der Körper K unendlich. Dann ist die Abbildung

$$\begin{array}{rccc} \Phi: & K[x] & \longrightarrow & K[x]^{\sim} \\ & f & \longmapsto & \tilde{f} \end{array}$$

eine K-Algebren-Isomorphie.

Beweis
Es ist unmittelbar zu prüfen, dass $\widetilde{f + cg} = \tilde{f} + c\tilde{g}$ und $\widetilde{fg} = \tilde{f}\tilde{g}$. Die Abbildung ist per Definition surjektiv. Ist sie Injektiv? D.h. $\tilde{f} = 0 \Rightarrow f = 0$?
Seien $\deg f = n$ und $t_0, \ldots, t_n$ verschiedene Elemente in K. Seien $P_0, \ldots, P_n$ wie in LIF und schreibe $f = \sum f(t_i) P_i$. Wenn $\tilde{f} = 0$, dann gilt insbesondere für alle $i = 0, \ldots, n$ dass $f(t_i) = 0$. D.h. alle Koeffizienten von f sind Null und somit ist $f = 0$ das Nullpolynom. $\square$

§ 3 Ideale

In Satz 7.1(i) haben wir schon bewiesen, dass $K[x]$ ein Integritätsbereich ist und die Kürzungsregel $f, g, h \in K[x] : f \neq 0$ und $fg = fh \Rightarrow g = h$ (Korollar 7.3) erfüllt.
Wir beweisen nun den Divisionsalgorithmus in $K[x]$. Wir benötigen ein Hilfslemma:

Lemma 8.3.
Seien $f, d \neq 0$ mit $\deg d \leq \deg f$. Es gibt ein $g \in K[x]$, so dass $f - dg = 0$ oder $\deg(f - dg) < \deg f$.

Beweis:
Schreibe $\deg f := m \geq n := \deg d$.

$$f = a_m x^m \quad + \quad \sum_{i=0}^{m-1} a_i x^i \qquad a_m \neq 0$$

$$d = b_n x^n \quad + \quad \sum_{i=0}^{n-1} b_i x^i \qquad b_n \neq 0$$

Betrachte $\dfrac{a_m}{b_n} x^{m-n} d = \dfrac{a_m}{b_n} x^{m-n} \big(b_n x^n + \sum\limits_{i=0}^{n-1} b_i x^i\big) = a_m x^m + \cdots$.
Also ist $f - \dfrac{a_m}{b_n} x^{m-n} d = 0$ oder $\deg\big(f - \frac{a_m}{b_n} x^{m-n} d\big) < \deg f$.
Setze also $g := (\frac{a_m}{b_n}) x^{m-n}$. □

Satz 8.4. (Divisionsalgorithmus)
Seien $f, d \in K[x]$; $f, d \neq 0$; $\deg d \leq \deg f$. Dann gibt es $q, r \in K[x]$, so dass

(*i*) $f = dq + r$ wobei

(*ii*) $r = 0$ oder $\deg r < \deg d$.

Ferner sind q, r durch (i) und (ii) eindeutig definiert.

Beweis:
Existenz: Sei $f \neq 0$ und $\deg f \geq \deg d$. Lemma 8.3 ergibt, dass ein $g \in K[x]$ existiert, so dass $f - dg = 0$ oder $\deg(f - dg) < \deg f$.
Wenn $f - dg \neq 0$ und $\deg(f - dg) \geq \deg d$, folgt wieder aus Lemma 8.3, dass ein $h \in K[x]$ existiert, so dass $(f - dg) - dh = 0$ oder $\deg(f - d(g + h)) < \deg(f - dg)$.
Die Fortsetzung ergibt ... $< \deg(f - d(g + h)) < \deg(f - dg) < \deg f$.
Die Prozedur muss nach endlich vielen Schritten anhalten. Wir bekommen also $q \in K[x]$ und $r = 0$ oder $\deg r < \deg d$ mit $f = dq + r$.

Eindeutigkeit: Sei $f = dq_1 + r_1 = dq + r \Rightarrow d(q - q_1) = (r_1 - r)$ mit $r_1 = 0$ oder $\deg r_1 < \deg d$.
$q - q_1 \neq 0 \Rightarrow d(q - q_1) \neq 0$ und $\deg(r_1 - r) = \deg d + \deg(q - q_1) \geq \deg d$.
Aber $\deg(r_1 - r) \leq \max\,(\deg r_1, \deg r) < \deg d$ — ein Widerspruch.
So $q - q_1 = 0$ und damit $r_1 - r = 0$.

Definition 8.5.
Seien $f, d \in K[x]; d \neq 0$. Wir sagen d *teilt* f oder f *ist durch* d *teilbar* oder f *ist ein Vielfaches von* d, wenn der Divisionsalgorithmus $r = 0$ ergibt, d.h. : $f = dq + 0$. In diesem Fall heißt q Quotient.

Diesen Begriff von Teilbarkeit in $K[x]$ werden wir in Skript 9 weiter untersuchen und ausnutzen.

9 Script zur Vorlesung: Lineare Algebra II

Prof. Dr. Salma Kuhlmann

In diesem Skript werden wir Nullstellen von Polnomen und deren Vielfachheit studieren. Insbesondere werden wir in Abschnitt 4 Taylor's Formel lernen und beweisen. TF wird dann eingesetzt, um die Vielfachheit zu bestimmen. Diese Begriffe werden wir u.a. in Kapitel III; Normalformen benötigen.

Korollar 9.1.
Seien $f \in K[x]; c \in K$. Es gilt: $(x-c)$ teilt f genau dann, wenn $f(c) = 0$.

Beweis: Divisionsalgorithmus liefert q, r so dass $f = (x-c)q+r; r = 0$ oder deg $r < 1$. Also ist r ein Skalarpolynom und $f(c) = r(c) = r$. Insbesondere ist $r = 0$ genau dann, wenn $f(c) = 0$ ist. □

Definition 9.2.
Seien $f \in K[x]; c \in K$, dann ist c eine *Nullstelle* von f, wenn $f(c) = 0$. Abbreviation: "NS von f in K". Das heißt, c ist Nullstelle von f genau dann, wenn $(x-c)$ teilt f.

Korollar 9.3.
Sei $f \in K[x]$ mit deg $f = n$. Dann hat f höchstens n Nullstellen in K.

Beweis Wir beweisen per Induktion nach n.
• Induktionsanfang: Wir prüfen gleich für $n = 0$ (und $n = 1$). Wenn $n = 0$, dann ist $f = c$ ein Skalarpolynom und $c \neq 0$. Dann hat f keine Nullstellen in K Wenn $n = 1$, dann $\exists a, c \in K, a \neq 0,\ s.d.\ f = ax + c$. Klar gilt $ax + c = 0$ genau dann, wenn $x = \frac{-c}{a}$, und damit ist $\frac{-c}{a}$ die eindeutige Nullstelle.
• Induktionsannahme: Wir nehmen an, dass die Aussage für $n-1$ gilt.
• Induktionsschritt: Sei a eine Nullstelle von f in K. Dann gibt es $q \in K[x]$ so dass $f = (x-a)q; \quad \deg q = n-1$.
Sei $b \in K$. Nun ist $f(b) = 0$ genau dann, wenn $b = a$ oder b ist Nullstelle von q in K.
Nach Induktionsannahme hat q höchstens $(n-1)$ Nullstellen, also hat damit f höchstens n Nullstellen. □

§ 4 Formale Ableitungen

Notation 9.0.
Sei $f = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_n x^n$. Setze:
$f^{(0)} = f := D^0 f$ (Konvention) und
$f^{(1)} := f' = c_1 + 2c_2 x + \cdots + nc_n x^{n-1} := D^1 f = D(f)$,
$f^{(2)} = f'' = D^2 f := D(D(f))$,
$f^{(3)} = D^3(f)$,
usw.

Bemerkung 9.4.
Für $f, g \in K[x]$ und $c \in K$ gilt: $D(f + cg) = D(f) + cD(g)$.
So ist $D\colon K[x] \longrightarrow K[x]$ ein linearer Operator. (Siehe auch ÜB 10; LA I.) Allgemeiner gilt für $n \in \mathbb{N}_0$: D^n ist ein linearer Operator.

Satz 9.5. (Taylor's Formel)
Seien Char $(K) = 0; n \in \mathbb{N}_0, a \in K, p \in K[x]$ und deg $p \leq n$.
Es gilt: $p = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} p^{(i)}(a) \frac{1}{i!} (x-a)^i$ $(*)$

Beweis:
(Die Beweisidee is wie für LIF.) Sei V der K-Vektorraum der Polynome von deg $\leq n$ (und das 0 Polynom).
Für alle $i = 0, \ldots, n$, definiere $l_i : V \longrightarrow K;\ l_i \in V^*$, durch $l_i(p) := p^{(i)}(a)$.
Setze $p_i := \frac{1}{i!}(x-a)^i$. Es gilt $l_j(p_i) = \delta_{ij}$ (siehe Übungsblatt).
Also sind $p_0, \ldots, p_n$ und $l_0, \ldots, l_n$ zueinander Dual-Basen von V und V^*.
Also $p = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} l_i(p) p_i$. □

Bemerkung 9.6.
(1) $1, (x-a), \ldots, (x-a)^n$ sind linear unabhängig. Also ist diese lineare Kombination $(*)$ eindeutig.

(2) Char $(K) = 0$ wird vorausgesetzt damit $i! \neq 0$.

Definition 9.7.
Sei $f \neq 0$ und $c \in K$ eine Nullstelle von f in K. Die *Vielfachheit* von c ist das größte $\mu \in \mathbb{N}$, so dass gilt: $(x-c)^\mu$ teilt f.
Bemerke: $1 \leq \mu \leq \deg f$.

Satz 9.8. (Ableitung Test für Vielfachheit)
Seien Char $(K) = 0, f \neq 0, \deg f \leq n$ und $c \in K$ ist eine Nullstelle von f.
Es gilt: c hat die Vielfachheit μ genau dann, wenn
$f^{(k)}(c) = 0$ bei $0 \leq k \leq \mu - 1$ und $f^{(\mu)}(c) \neq 0$ $(\dagger)$

Beweis

"$\Rightarrow$" $(x-c)^\mu$ teil f und $(x-c)^{\mu+1}$ teilt f nicht. Es gibt also $g \neq 0$ mit $f = (x-c)^\mu g$.
Bemerke: $\deg g \leq n-\mu$ und $g(c) \neq 0$.

Die Taylor Formel liefert:
$f = (x-c)^\mu \left[\sum_{m=0}^{n-\mu} g^{(m)}(c)\frac{(x-c)^m}{m!}\right]$. Also $f = \sum_{m=0}^{n-\mu} g^{(m)}(c)\frac{(x-c)^{\mu+m}}{m!}$.

Da die Koeffizienten von f als lineare Kombination von $(x-c)^k (0 \leq k \leq n)$ eindeutig sind, ergibt ein Vergleich:

$$f = \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(c)\frac{(x-c)^k}{k!} = \sum_{m=0}^{n-\mu} g^{(m)}(c)\frac{(x-c)^{\mu+m}}{m!} =$$

$$g^{(0)}(c)\frac{(x-c)^\mu}{0!} + \cdots + g^{(n-\mu)}(c)\frac{(x-c)^n}{(n-\mu)!}. \qquad (\dagger\dagger)$$

Also $\frac{f^{(k)}}{k!}(c) = 0$ für $0 \leq k \leq \mu-1$ und $\frac{f^{(k)}}{k!}(c) = \frac{g^{(k-\mu)}(c)}{(k-\mu)!}$ für $\mu \leq k \leq n$.

Insbesondere für $\mu = k$ erhalten wir $f^{(\mu)}(c) = g(c) \neq 0$.

"$\Leftarrow$" $(*)$ und $(\dagger\dagger)$ liefern $f = \sum_{k=\mu}^{n} f^{(k)}(c)\frac{(x-c)^k}{k!}$.

Also $f = (x-c)^\mu \underbrace{\left[\frac{f^{(\mu)}(c)}{\mu!} + \frac{f^{(\mu+1)}(c)}{(\mu+1)!}(x-c) + \cdots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^{n-\mu}\right]}_{:=g}$

$$g(c) = \frac{f^{(\mu)}(c)}{\mu!} \neq 0.$$

Also $f = (x-c)^\mu g$ mit $g(c) \neq 0$.
Wir behaupten nun: $(x-c)^{\mu+1}$ teilt f nicht, sonst hätten wir $h \in K[x]$
mit $f = (x-c)^{\mu+1}h = (x-c)^\mu(x-c)h = (x-c)^\mu g$.
$K[x]$ Integritätsbereich $\Rightarrow g = (x-c)h$. Also $g(c) = 0$. Ein Widerspruch. $\square$

10 Script zur Vorlesung: Lineare Algebra II

Prof. Dr. Salma Kuhlmann

In diesem Skript untersuchen wir weiter den Ring $K[x]$. Wir werden feststellen, das $K[x]$ viele Eigenschaften hat wie der Ring Z. Diese Eigenschaften von Z haben wir in der Vorlesung LA I Skripte 1-4 studiert und bewiesen; die Beweise hier sind sehr ähnlich. Wir zeigen u.a. das jedes Ideal in $K[x]$ ein Hauptideal ist. Dafür werden wir Satz 8.4 (DA) verwenden. In Abschnitt 6 beenden wir vorerst unsere Untersuchung von $K[x]$: Wir etablieren das auch in $K[x]$ die Primfaktorisierung gilt. Somit beenden wir Kapitel I.

Definition 10.1. Seien $p_1, \dots, p_\ell \in K[x]$. Ein Polynom $d \in K[x]$ ist der *größte gemeinsame Teiler* von $p_1, \dots, p_\ell$, bezeichnet mit $\mathrm{ggT}(p_1, \dots, p_\ell)$, wenn:

1. $\forall 1 \leq i \leq \ell$: $d \mid p_i$ und
2. Wenn auch $d_0 \in K[x]$ 1. erfüllt, dann gilt auch $d_0 \mid d$.

Definition 10.2.
$p_1, \dots, p_\ell$ sind *relativprim*, wenn ggT $(p_1, \dots, p_\ell) = 1$ ist.

Definition 10.3.
Ein K-Unterraum $M \subseteq K[x]$ ist ein *Ideal*, wenn gilt: Für alle $f \in K[x]$ und $g \in M$ ist $fg \in M$.

Beispiel 10.4.
Sei $d \in K[x]$. Dann ist $M := dK[x] = \{df; f \in K[x]\}$ ein Ideal:

• $df \in M;\ dg \in M;\ c \in K \Rightarrow c(df) - dg = d(cf - g) \in M$, also ist M ein Unterraum.
• $f \in K[x]$ und $dg \in M \Rightarrow f(dg) = d(fg) \in M$.

Definition 10.5.
$< d >:= dK[x]$ heißt *Hauptideal* mit Erzeuger d.

Beispiel 10.6.
$K[x] =< 1 >$ und $\{0\} =< 0 >$ sind Hauptideale.

Beispiel 10.7.
Seien $d_1, \dots, d_\ell \in K[x]$. $M := d_1K[x] + \cdots + d_\ell K[x]$ ist ein K-Unterraum. Es ist ein Ideal:
Sei $p \in M, p = d_1f_1 + \cdots + d_\ell f_\ell$ mit $f_1, \dots, f_\ell \in K[x]$ und sei $f \in K[x]$,
dann ist $pf = d_1 \underbrace{(f_1f)}_{\in K[x]} + \cdots + d_\ell \underbrace{(f_\ell f)}_{\in K[x]} \in M$.

Definition 10.8.
Das Ideal $d_1K[x] + \cdots + d_\ell K[x]$, bezeichnet mit $< d_1, \ldots, d_\ell >$, ist ein *endlich erzeugtes Ideal*, mit Erzeugern $d_1, \ldots, d_\ell$.

Weitere Beispiele siehe Übungsblatt.

Satz 10.9.
Sei $0 \neq M \subseteq K[x]$ ein Ideal. Es existiert genau ein normiertes Polynom $d \in K[x]$, so dass $M =< d >$.

Beweis:
Existenz: Sei $d \neq 0$ und $d \in M$, wähle d so, dass deg d minimal ist, und ohne Einschränkung ist d normiert.
Sei $f \in M$. (Divisionsalgorithmus) $\Rightarrow f = dq + r$, mit $r = 0$ oder deg $r <$ deg d.

Aber $\underbrace{r = f - dq}_{\in M}$. Folglich muss $r = 0$ und damit $f = dq$ sein.

Eindeutigkeit: Sei g normiert, so dass $M = gK[x]$ ist. Somit existieren $0 \neq p, q \in K[x]$, so dass $d = gp$ und $g = dq$, also $d = dqp$ ist. Es folgt deg $d =$ deg $d +$ deg $p +$ deg q. Daher gilt deg $p =$ deg $q = 0$; p, q sind Skalarpolynome. Nun sind g und d normiert, also $p = q = 1$ und damit $d = g$. $\square$

Korollar 10.10.
Der normierte Erzeuger d vom Ideal $< p_1, \ldots, p_\ell >$ ist ggT$(p_1, \ldots, p_\ell)$. Insbesondere, wenn $p_1, \ldots, p_\ell$ relativprim sind, dann ist $< p_1, \ldots, p_\ell >= K[x]$

Beweis:

1. $< d >= dK[x] =< p_1, \ldots, p_\ell >$, also $p_i \in < d >$ für alle $1 \leq i \leq \ell$ und folglich $d \mid p_i$.
2. Sei $d_0 \in K[x]$ so, dass $d \mid p_i$ für alle $1 \leq i \leq \ell$. Es gibt also $g_i \in K[x]$ mit $p_i = d_0 g_i$ für alle $1 \leq i \leq \ell$. Nun ist $d \in < p_1, \ldots, p_\ell >$, also $d = p_1q_1 + \ldots + p_\ell q_\ell = d_0[g_1q_1 + \ldots + g_\ell q_\ell]$.

$\square$

§ 5 Primzerlegung (Primfaktorisierung)

Definition 10.11.
$f \in K[x]$ ist *reduzibel* über K, wenn es $g, h \in K[x]$ gibt mit $\deg g \geq 1, \deg h \geq 1$ und $f = gh$. Sonst ist f *irreduzibel*. Ist f irreduzibel und $\deg f \geq 1$, so nennen wir f *Primpolynome*.
Bemerkung: f reduzibel $\Rightarrow \deg f \geq 2$.

Beispiel 10.12.
$f = x^2 + 1 = (x+i)(x-i)$ ist reduzibel über $\mathbb{C}$, aber irreduzibel über $\mathbb{R}$, weil es keine reellen Nullstellen hat.

Weitere Beispiele siehe Übungsblatt.

Satz 10.13.
Seien $p, f, g \in K[x]$, p ist ein Primpolynom. Aus $p \mid fg$ folgt $p \mid f$ oder $p \mid g$.

Beweis:
Setze $d := \mathrm{ggT}(f, p)$. Ohne Einschränkung ist p normiert und p irreduzibel. Folglich sind 1 und p die einzigen normierten Teiler von p. Damit ist $d = 1$ oder $d = p$. Aus Korollar 10.10 folgt außerdem, dass $p_0, f_0 \in K[x]$ existieren so dass $d = p_0 p + f_0 f$.

- Wenn $d = p$, dann $p \mid f$.
- Wenn $d = 1$, dann ist $1 = p_0 p + f_0 f$, also $g = f_0(fg) + p(p_0 g)$. Nun gilt $p \mid fg$, $p \mid p(p_0)g$ und daraus folgt $p \mid g$. □

Korollar 10.14.
p ist ein Primpolynom. $p \mid f_1 \cdots f_\ell \Rightarrow$ es existiert ein $i \in \{1, \ldots, \ell\}$, so dass $p \mid f_i$.

Satz 10.15.
Sei $f \in K[x]$, f normiert und $\deg f \geq 1$. Dann ist f ein Produkt von normierten Primpolynomen. Diese Darstellung ist eindeutig, bis auf Umnummerierung.

Beweis:
Existenz:
- $\deg f = 1 \Rightarrow f$ irreduzibel. Es ist nichts weiter zu zeigen.
- Sei nun $n := \deg f > 1$ — Beweis per Induktion nach n. Ist f irreduzibel, dann ist nichts weiter zu zeigen. Sonst $f = gh$ mit $n > \deg g \geq 1$ und $n > \deg h \geq 1$. Die Induktionsannahme gilt für g, h und damit bekommen wir eine Faktorisierung für f.

Eindeutigkeit:
- Sei $f = p_1 \cdots p_\ell = q_1 \cdots q_s$. Nun sind für alle i die p_i, q_i normierte Primpolynome. Also $p_\ell \mid q_1 \cdots q_s$. Es folgt $p_\ell \mid q_j$ für ein gewisses $1 \leq j \leq s$. Da p_ℓ, q_j beide normierte Primpolynome sind folgt $q_j = p_\ell$.
- Ohne Einschränkung nach Umnummerierung bekommen wir $p_\ell = q_s$ $(*)$
  Somit $P := p_1 \cdots p_{\ell-1} = q_1 \cdots q_{s-1}$.
- Die Induktionsannahme gilt für P, weil $\deg(P) < n$. Das heißt $q_1, \ldots, q_{s-1}$ ist eine Umnummerierung von $p_1, \ldots, p_{\ell-1}$.

Diese letzte Aussage zusammen mit $(*)$ beweist unsere Behauptung. □

11 Script zur Vorlesung: Lineare Algebra II

Prof. Dr. Salma Kuhlmann

KAPITEL II: MULTILINEARFORMEN UND DETERMINANTEN.

In diesem Skript führen wir die symmetrische Gruppe Sn ein, die wir für die Definition der Determinante später brauchen. Unser erstes Ziel ist es Satz 11.8 zu beweisen. Wir werden die Untersuchung von S_n in Skript 12 fortsetzen.

§ 6 Die symmetrischen Gruppen S_n

Notation 11.0.
Für $n \in \mathbb{N}$, setze $\mathbb{N}_n := \{1, \ldots, n\}$.

Definition 11.1.
Sei $n \in \mathbb{N}$. Eine *Permutation* auf $\mathbb{N}_n$ ist eine Bijektion $\alpha\colon \mathbb{N}_n \to \mathbb{N}_n$. Wir schreiben S_n für die Menge der Permutationen auf $\mathbb{N}_n$. Diese Menge S_n versehen mit der Verknüpfung $S_n \times S_n \to S_n, (\alpha, \beta) \rightarrowtail \alpha \circ \beta$ ist eine Gruppe; die *symmetrische Gruppe auf n Elementen.*
Notation: Wir schreiben $\alpha\beta := \alpha \circ \beta$. Für $\alpha \in S_n$ schreiben wir:

$$\alpha := \begin{pmatrix} 1 & \ldots & n \\ \alpha(1) & \ldots & \alpha(n) \end{pmatrix}$$

- Warum ist S_n eine Gruppe?

1. Wenn $\alpha, \beta \in S_n$, dann ist $\alpha \circ \beta$ bijektiv, also $\alpha \circ \beta \in S_n$.
2. Die Identitätsabbildung $\epsilon\colon \mathbb{N}_n \to \mathbb{N}_n$, definiert durch $\epsilon(i) := i$ für alle $i \in \mathbb{N}_n$, ist das neutrale Element von S_n.
3. Bijektive Abbildungen sind invertierbar: wenn $\alpha \in S_n$, dann gibt es $\beta \in S_n$ so dass $\alpha \circ \beta = \epsilon$.
4. Multiplikation ist assoziativ, weil die Komposition von Abbildungen immer assoziativ ist.

□

Beispiel 11.2.
Die Permutation $\alpha \in S_5$ mit $\alpha(1) = 3; \alpha(2) = 5; \alpha(3) = 4; \alpha(4) = 1; \alpha(5) = 2$ wird so geschrieben:

$$\alpha := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Definition 11.3.

1. Sei $\alpha \in S_n$. Wenn es $a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{N}_n$ gibt so dass:
   - $\alpha(a_i) = a_{i+1};\ \forall\ 1 \leq i \leq m-1$; und
   - $\alpha(a_m) = a_1$ und
   - $\alpha(x) = x;\ \forall x \notin \{a_1, \ldots, a_m\}$,

   dann heißt α ein *m-Zyklus*.
   Notation dafür: $(a_1\ a_2 \ldots a_m)$.

   Konvention: Die Identitätsabbildung wird mit $\epsilon := (1)$ bezeichnet.
2. Ein 2-Zyklus heißt eine *Transposition*.

Beispiel 11.4.
Die Permutation

$$\alpha := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

ist der 3-Zyklus (142).

Definition 11.5.
Die Permutationen $\alpha, \beta \in S_n$ sind *disjunkt*, wenn

$$\{x\ ;\ \alpha(x) \neq x\} \cap \{x\ ;\ \beta(x) \neq x\} = \emptyset.$$

Beispiel 11.6.
Betrachte folgende Transpositionen:

$$\sigma := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} = (12)$$

$$\tau := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} = (34)$$

und

$$\gamma := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} = (23)$$

Die Permutationen σ und τ sind disjunkt, σ und γ sind nicht disjunkt, τ und γ sind nicht disjunkt.

Lemma 11.7.
Seien $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in S_n$ paarweise disjunkte Permutationen und sei $\tau \in S_n$. Die Permutationen $\alpha_1 \ldots \alpha_m$ und τ sind disjunkt genau dann, wenn für alle $1 \leq i \leq m$ die Permutationen α_i und τ disjunkt sind.

Beweis: Siehe ÜB. □

Satz 11.8. Jede Permutation $\sigma \in S_n$ hat eine Darstellung als Produkt $\sigma = \alpha_1 \ldots \alpha_m \in S_n$ paarweise disjunkte Zyklen sind.

Beweis:
Sei $n \in \mathbb{N}$ fest. Wir beweisen die Aussage per Induktion nach:

$$\Gamma(\sigma) := |\{a \in \mathbb{N}_n \; ; \; \sigma(a) \neq a\}|$$

- Induktionsanfang:
  wenn $\Gamma(\sigma) = 0$, dann ist $\sigma = \epsilon = (1)$.
- Induktionsannahme:
  die Aussage gelte für alle $\tau \in S_n$ wofür $\Gamma(\tau) < k$.
- Induktionsschritt:
  Setze $k := \Gamma(\sigma) > 0$. Sei $i_0 \in \mathbb{N}_n$ so dass $\sigma(i_0) \neq i_0$.
  Für $s \in \mathbb{N}$ setze $i_s := \sigma^s(i_0)$. Da $\{i_s \; ; \; s \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{N}_n$, ist diese Menge endlich.
  Folglich gibt es $p < q \in \mathbb{N}$ so dass $i_p = i_q$. Insbesondere ist $\sigma^{q-p}(i_0) = i_0$.
  Also ist die Menge $\{l \in \mathbb{N} \; ; \; \sigma^l(i_0) = i_0\}$ nicht die leere Menge.
  Sei $p \geq 2$ die kleinste natürliche Zahl wofür $\sigma^p(i_0) = i_0$ und setze $r := p - 1$.
  Die Minimalität von p impliziert, dass $|\{i_0, \ldots, i_r\}| = p$
  (wenn $i_j = i_l$ für $0 \leq j < l \leq r$ dann wäre $\sigma^{l-j}(i_0) = i_0$, und $l - j < p$, Widerspruch).
  Analog beweist man: für $a \in \{i_0, \ldots, i_r\}$ gilt $\sigma(a) \neq a$. $(*)$
  Betrachte den Zyklus $\tau := (i_0 \ldots i_r)$.
  Per Definition gilt für alle $0 \leq l \leq r$ dass $\tau(i_l) = \sigma(i_l)$. $(\dagger)$
  Bemerke auch, dass für ein $a \in \mathbb{N}_n$: $\tau(a) = a$ genau dann, wenn $a \notin \{i_0, \ldots, i_r\}$. $(**)$
  Aus $(*)$ folgt außerdem, dass $\sigma(a) = a$ impliziert $a \notin \{i_0, \ldots, i_r\}$. $(***)$
  Aus $(\dagger), (**)$ und $(***)$ folgt unmittelbar:

  $$\{a \in \mathbb{N}_n \; ; \; \tau^{-1}\sigma(a) = a\} = \{a \in \mathbb{N}_n \; ; \; \sigma(a) = a\} \cup \{i_0, \ldots, i_r\}. \quad (\dagger\dagger)$$

  Also ist $\Gamma(\tau^{-1}\sigma) < \Gamma(\sigma)$ und die Induktionsannahme gilt dafür. Schreibe

  $$\tau^{-1}\sigma = \alpha_1 \ldots \alpha_m$$

  oder

  $$\sigma = \tau\alpha_1 \ldots \alpha_m$$

  wobei $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ paarweise disjunkte Zyklen sind.
  Aus $(\dagger\dagger)$ und $(**)$ folgt:
  $\tau^{-1}\sigma = \alpha_1 \ldots \alpha_m$ und τ sind disjunkt. Schließlich folgt aus Lemma 11.7, dass auch $\tau, \alpha_1, \ldots, \alpha_m$ paarweise disjunkte Zyklen sind. $\square$

12 Script zur Vorlesung: Lineare Algebra II

Prof. Dr. Salma Kuhlmann

In diesem Skript werden wir die Parität einer Permutation einführen und beweisen, dass der Begriff wohldefiniert ist. Für $n > 1$ werden wir dann eine wichtige Untergruppe von S_n kennenlernen und damit Abschnitt 6 beenden. Diese Vorarbeit ist für die spätere formale Behandlung der Determinante notwendig.

§ 6 Die symmetrischen Gruppen S_n (Fortsetzung)

Beispiel: Die Darstellung als Produkt von paarweise disjunkten Zyklen der Permutation

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} = (134)(25)$$

Satz 12.1. Jede Permutation $\sigma \in S_n$ ist ein Produkt von Transpositionen.

Beweis:
Das neutrale Element (1) ist (12)(21).
Wegen Satz 11.8 genügt es zu zeigen, dass ein Zyklus ein Produkt von Transpositionen (2-Zyklen) ist. Sei $(i_1 \dots i_r) \in S_n$ ein r-Zyklus mit $r > 2$. Wir behaupten, dass

$$(i_1 i_2 \dots i_r) = (i_1 i_r)(i_1 i_{r-1}) \dots (i_1 i_3)(i_1 i_2).$$

Für i_r gilt:

$$(i_1 i_r)(i_1 i_{r-1}) \dots (i_1 i_3)(i_1 i_2) i_r = (i_1 i_r) i_r = i_1$$

Für i_s mit $1 \leq s < r$ gilt:

$$\begin{aligned} (i_1 i_r)(i_1 i_{r-1}) \dots (i_1 i_3)(i_1 i_2) i_s &= (i_1 i_r)(i_1 i_{r-1}) \dots (i_1 i_{s+1})(i_1 i_s) i_s \\ &= (i_1 i_r)(i_1 i_{r-1}) \dots (i_1 i_{s+2})(i_1 i_{s+1}) i_1 \\ &= (i_1 i_r)(i_1 i_{r-1}) \dots (i_1 i_{s+2}) i_{s+1} = i_{s+1} \end{aligned}$$

□

Beispiel 12.2. Die Permutation $(123) \in S_4$ hat zwei Darstellungen:

$$(123) = (13)(12) = (13)(42)(12)(14)$$

Die Darstellung ist also i.A. nicht eindeutig, sogar ist die Anzahl der Permutationen in einer Darstellung nicht eindeutig. Was ist denn eindeutig? Die **Parität** ist eindeutig, wie wir jetzt erklären.

Erinnerung: $\mathbb{Z}^n = \mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}$

Definition 12.3. Seien $\sigma \in S_n$ und $f\colon \mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z}$ eine Abbildung. Wir definieren σf als Abbildung $\sigma f\colon \mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z}$ wie folgt:

$$(\sigma f)(x_1, \dots, x_n) := f(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)})$$

Beispiel 12.4. Sei $f: \mathbb{Z}^3 \to \mathbb{Z}$ definiert durch $f(x_1, x_2, x_3) := x_1 x_2 + x_3$ und $\sigma := (123) \in S_3$. Dann ist $(\sigma f)(x_1, x_2, x_3) = f(x_2, x_3, x_1) = x_2 x_3 + x_1$.

Lemma 12.5. Seien $\sigma, \tau \in S_n$ und $f, g: \mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z}$. Dann ist

(i) $\sigma(\tau f) = (\sigma\tau) f$,

(ii) $\sigma(fg) = (\sigma f)(\sigma g)$.

Beweis: Siehe ÜB.

Satz 12.6. Es existiert eine wohldefinierte Abbildung $\operatorname{sign}: S_n \to \{-1, 1\}$ so dass:

(a) Für jede Transposition $\tau \in S_n$ ist $\operatorname{sign}(\tau) = -1$.

(b) Für alle $\sigma, \tau \in S_n$ gilt
$$\operatorname{sign}(\sigma\tau) = \operatorname{sign}(\sigma)\operatorname{sign}(\tau).$$

Diese Abbildung ist eindeutig mit diesen Eigenschaften.

Beweis: Seien $n \in \mathbb{N}$ und $\Delta: \mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z}$ die Abbildung
$$\Delta(x_1, \dots, x_n) := \prod_{1 \le i < j \le n} (x_j - x_i).$$

Behauptung: Für eine Transposition $\tau \in S_n$ gilt $\tau\Delta = -\Delta$. In der Tat, sei $\tau = (rs)$ mit $r < s$. Aus Lemma 12.5 (ii) folgt
$$\tau\Delta(x_1, \dots, x_n) := \prod_{1 \le i < j \le n} \tau(x_j - x_i).$$

Offensichtlich, wenn $i, j \notin \{r, s\}$, dann $\tau(x_j - x_i) = (x_j - x_i)$.
Für den Faktor $(x_s - x_r)$ gilt $\tau(x_s - x_r) = (x_r - x_s) = -(x_s - x_r)$. Die anderen Faktoren können wir wie folgt paaren:
$$\begin{aligned}
&(x_k - x_s)(x_k - x_r), \text{wenn } k > s;\\
&(x_s - x_k)(x_k - x_r), \text{wenn } r < k < s;\\
&(x_s - x_k)(x_r - x_k), \text{wenn } k < r.
\end{aligned}$$

Jedes Produkt ist von τ unberührt.
Also $\tau\Delta = -\Delta$. Wir haben die Behauptung bewiesen. □Beh.
Sei nun $\sigma \in S_n$. Wegen Satz 12.1 schreiben wir $\sigma = \tau_1 \dots \tau_m$, wobei $\tau_1, \dots \tau_m$ Transpositionen sind.
Aus Lemma 12.5(i) folgt:
$$\sigma\Delta = \tau_1(\tau_2(\dots(\tau_m\Delta)\dots))$$
und die Behauptung impliziert
$$\tau_1(\tau_2(\dots(\tau_m\Delta)\dots)) = (-1)^m\Delta.$$

Also **entweder** $\sigma\Delta = (-1)^m\Delta = \Delta$ wenn m gerade, **oder** $\sigma\Delta = (-1)^m\Delta = -\Delta$ wenn m ungerade. Wir merken, dass beide Fälle nicht gleichzeitig auftreten können, da $\Delta \neq 0$ ist.

Für $\sigma \in S_n$ setze entweder $\operatorname{sign}(\sigma) = 1$ wenn $\sigma\Delta = \Delta$, oder $\operatorname{sign}(\sigma) = -1$ wenn $\sigma\Delta = -\Delta$.

Seien $\sigma, \tau \in S_n$. Aus Lemma 12.5 (ii) folgt: $(\sigma\tau)\Delta = \sigma(\tau\Delta)$, also $\operatorname{sign}(\sigma\tau) = \operatorname{sign}(\sigma)\operatorname{sign}(\tau)$. □

Definition 12.7. Für $\sigma \in S_n$ nennen wir $\operatorname{sign}(\sigma)$ die *Signatur von* σ. Wir nennen σ *gerade* wenn $\operatorname{sign}(\sigma) = 1$ und *ungerade* wenn $\operatorname{sign}(\sigma) = -1$.

Bemerkung 12.8. Die Permutation

- σ ist gerade genau dann, wenn σ ein Produkt von m Transpositionen mit m gerade ist, und
- σ ist ungerade genau dann, wenn σ ein Produkt von m Transpositionen mit m ungerade ist.

Betrachte nun die folgende Untermenge von S_n:

$$A_n := \{\sigma \mid \sigma \text{ ist gerade}\}$$

Korollar 12.9. A_n ist eine Untergruppe von S_n und $|A_n| = \dfrac{n!}{2}$.

Beweis:
Das neutrale Element (1) ist gerade, also $(1) \in A_n$.
Wenn $\sigma = \tau_1 \cdots \tau_m$ und $\gamma = \gamma_1 \cdots \gamma_k$ (wobei τ_i, γ_j Transpositionen und k, n gerade sind), dann ist $\sigma\gamma = \tau_1 \cdots \tau_m \gamma_1 \cdots \gamma_k$. Also ist A_n abgeschlossen unter Produkten.
Da $\sigma^{-1} = \tau_m^{-1} \cdots \tau_1^{-1}$, ist A_n auch unter Inversen abgeschlossen. Siehe ÜB.

Betrachte nun $U := \{\delta \in S_n \mid \delta \text{ ist ungerade }\}$. Offensichtlich ist $S_n = A_n \uplus U$.
Außerdem ist $A_n \longrightarrow U; \sigma \longmapsto (12)\sigma$ eine bijektive Abbildung.
Da $|S_n| = n!$ (siehe ÜB), folgt unsere letzte Behauptung. $\square$

Definition 12.10. Wir nennen A_n die *alternierende Gruppe.*

13 Script zur Vorlesung: Lineare Algebra II

Prof. Dr. Salma Kuhlmann

Im Abschnitt 7 werden wir den Begriff "m-lineare Formen" einführen (eine natürliche Verallgemeinerung vom Begriff "lineare Funktionale") und in Abschnitt 8 werden wir besondere m-lineare Formen studieren. Diese Vorarbeit ist für die spätere formale Behandlung der Determinante notwending.

§ 7 Multilineare Formen

Definition 13.1.
Sei K ein Körper und seien U, V K-Vektorräume.

$$\beta: U \times V \longrightarrow K$$

$$(x, y) \longmapsto \beta(x, y)$$

ist ein *bilineares Funktional* (oder bilineare Form), falls gilt:

(1) $\beta(c_1x_1 + c_2x_2, y) = c_1\beta(x_1, y) + c_2\beta(x_2, y)$ und

(2) $\beta(x, d_1y_1 + d_2y_2) = d_1\beta(x, y_1) + d_2\beta(x, y_2)$

für alle $x, x_1, x_2 \in U,\ y, y_1, y_2 \in V$ und $c_1, c_2, d_1, d_2 \in K$.

Beispiel 13.2.
$V \times V^* \longrightarrow K$
$(x, f) \longmapsto [x, f]$, wobei $[x, f] := f(x)$.
Die definierenden Eigenschaften und Verknüpfungen in V^* liefern

(1) $[c_1x_1 + c_2x_2, y] = c_1[x_1, y] + c_2[x_2, y]$ und

(2) $[x, d_1y_1 + d_2y_2] = d_1[x, y_1] + d_2[x, y_2]$.

Notation
$L^{(2)}(U \times V; K) :=$ die Menge der bilinearen Formen auf $U \times V$. Sie ist ein Vektorraum (mit den Verknüpfungen $(c_1\beta_1 + c_2\beta_2)(x, y) := c_1\beta_1(x, y) + c_2\beta_2(x, y)$ wie üblich).

Definition 13.3.
Seien $m \in \mathbb{N}$ und $V_1, \ldots, V_m$ K-Vektorräume. Ein *m-lineares Funktional* (Form) (oder multilineares Funktional vom Grad m) auf $\varphi_1 \times \cdots \times V_m$ ist eine Abbildung $\mu: V_1 \times \cdots \times V_m \longrightarrow K$, so dass für alle $i \in \{1, \ldots, m\}$ gilt:

$$\left.\begin{array}{rcll} \mu(\alpha_1, \ldots, & c\alpha_i + \gamma_i & , \ldots, \alpha_m) & = \\ c\mu(\alpha_1, \ldots, & \alpha_i & , \ldots, \alpha_m) & + \\ \mu(\alpha_1, \ldots, & \gamma_i & , \ldots, \alpha_m) & \end{array}\right\} \quad \text{für } \alpha_i, \gamma_i \in V_i;\ c \in K.$$

Notation
$L^{(m)}(V_1 \times \cdots \times V_m; K) := K$-Vektorraum der m-linearen Formen.

Bemerkung 13.4.
Sei μ multilinear. Wenn $\alpha_i = 0$ (für irgendein i), dann gilt $\mu(\alpha_1, \ldots, \alpha_i, \ldots, \alpha_m) = 0$.

§ 8 Alternierende multinineare Formen auf K^n

Definition 13.5.
Sei $n \in \mathbb{N}$ und $V = K^n$. Eine n-lineare Form

$$\delta : \underbrace{K^n \times \cdots \times K^n}_{n-\text{mal}} \longrightarrow K$$

ist *alternierend*, wenn für alle $(z_1, \ldots, z_n)$ wofür es $i \neq j$ gibt mit $z_i = z_j$, gilt $\delta(z_1, \ldots, z_n) = 0$.

Konvention
δ wird auch als Abbildung auf $K^{n\times n} = M_{n\times n}(K)$ aufgefasst, nämlich

$$\delta(A) = \delta(z_1, \ldots, z_n), \text{ wobei } A = \begin{pmatrix} z_1 \\ --- \\ \cdots \\ --- \\ z_n \end{pmatrix};$$

i.e. z_i ist die $i$te Zeile der $n \times n$-Matrix A.

Lemma 13.6. Sei δ alternierend. Es gelten:

(i) $z_1, \ldots, z_n$ sind linear abhängig $\Rightarrow \delta(z_1, \ldots, z_n) = 0$.

(ii) Für alle $i \neq j$ gilt $\delta(z_1, \ldots, z_i, \ldots, z_j, \ldots, z_n) = -\delta(z_1, \ldots, z_j, \ldots, z_i, \ldots, z_n)$.
Es gilt allgemeiner, dass $\delta(z_{\pi(1)}, \ldots, z_{\pi(n)}) = \operatorname{sign}(\pi)\delta(z_1, \ldots, z_n)$ für alle $\pi \in S_n$. Siehe ÜB.

Beweis:

- Ohne Einschränkung nehmen wir an $\sum_{i=1}^{n-1} c_i z_i$ für geeignete $c_1, \ldots, c_{n-1} \in K$.

  Wir berechnen:

$$\delta(z_1, \ldots, z_{n-1}, \sum_{i=1}^{n-1} c_i z_i) = \sum_{i=1}^{n-1} c_i \delta(z_1, \ldots, z_{n-1}, z_i) = 0.$$

- Wir berechnen:

$$\begin{aligned} 0 &= \delta(z_1, \ldots, z_i + z_j, \ldots, z_j + z_i, \ldots, z_n) \\ &= \delta(z_1, \ldots, z_i, \ldots, z_j + z_i, \ldots, z_n) \\ &\quad + \delta(z_1, \ldots, z_j, \ldots, z_j + z_i, \ldots, z_n) \\ &= \delta(z_1, \ldots, z_i, \ldots, z_j, \ldots, z_n) \\ &\quad + \delta(z_1, \ldots, z_i, \ldots, z_i, \ldots, z_n) \\ &\quad + \delta(z_1, \ldots, z_j, \ldots, z_j, \ldots, z_n) \\ &\quad + \delta(z_1, \ldots, z_j, \ldots, z_i, \ldots, z_n). \end{aligned}$$

  Also: $0 = \delta(z_1, \ldots, z_i, \ldots, z_j, \ldots, z_n) = -\delta(z_1, \ldots, z_j, \ldots, z_i, \ldots, z_n)$ wie behauptet. □

Bemerkung 13.7.

(1) Wenn $\operatorname{Char}(K) \neq 2$, dann gilt auch die Umkehrung von Lemma 13.6 (ii); d.h. wenn δ Lemma 13.6(ii) erfüllt, dann ist δ alternierend:

Sei $z_i = z_j$ für $i \neq j$. Da δ Lemma 13.6(ii) erfüllt, ist

$$\delta(z_1, \ldots, z_i, \ldots, z_i, \ldots, z_n) = -\delta(z_1, \ldots, z_i, \ldots, z_i, \ldots, z_n).$$

Da $\operatorname{Char}(K) \neq 2$ gilt $\forall a \in K \colon a = -a \Rightarrow a = 0$. Insbesondere $\delta(z_1, \ldots, z_i, \ldots, z_i, \ldots, z_n) = 0$.

(2) Gegenbeispiel für den Fall wo $\operatorname{Char}(K) = 2$.
Betrachte folgende bilineare Form auf $\mathbb{F}_2 \times \mathbb{F}_2$:

$$\delta((a, b), (c, d)) := ac + bd.$$

Dann gilt $\delta((a, b), (c, d)) = -\delta((c, d), (a, b))$ immer, jedoch ist z.B. $\delta((1, 0), (1, 0)) = 1 \neq 0$.

14 Script zur Vorlesung: Lineare Algebra II

Prof. Dr. Salma Kuhlmann

In Skript 8 haben wir eine n-lineare Form δ als Abbildung mit Definitionsbereich $M_{n\times n}(K)$ aufgefasst. In diesem Skript werden wir diese Abbildungen genauer analysieren und ihre Eigenschaften studieren. Insbesondere werden wir die Determinante als solche betrachten.

Hier sei $\delta\colon K^n \times \cdots \times K^n \longrightarrow K$ eine alternierende lineare Form und $A \in M_{n\times n}(K)$.

Lemma 14.1.
Sei e eine elementare Zeilenumformung. Es gelten:

(i) $\delta(e(A)) = \delta(A)$; e von Typ 3;

(ii) $\delta(e(A)) = -\delta(A)$; e von Typ 1;

(iii) $\delta(e(A)) = c\delta(A)$; e von Typ 2.

(iv) Allgemeiner gilt: $\forall c \in K\colon \delta(cA) = c^n\delta(A)$.

Beweis:

(i) $\delta(z_1 + cz_2, z_2, \ldots, z_n) = \delta(z_1, z_2, \ldots, z_n) + c\delta(z_2, z_2, \ldots, z_n) = \delta(z_1, z_2, \ldots, z_n)$.

(ii) Folgt aus Lemma 7.8.

(iii) Folgt aus n-Linearität.

(iv) $\delta(cz_1, cz_2, \ldots, cz_n) = c\delta(z_1, cz_2, \ldots, cz_n) = c^2\delta(z_1, z_2, \ldots, cz_n) = \cdots = c^n\delta(z_1, z_2, \ldots, z_n)$. □

Lemma 14.2.
Für jedes $A \in M_{n\times n}(K)$ gibt es einen Skalar $\Delta_A \neq 0; \Delta_A \in K$, und Δ_A **hängt nur von A ab**, so dass: $\delta(A) = \Delta_A\delta(\text{r.z.S.F.}(A))$.

Beweis:
Ergibt sich durch wiederholte Anwendung von Lemma 14.1. Wir sehen, dass Δ_A ein Produkt der Gestalt $(-1)^\ell c_1 \ldots c_k$ für geeignete $\ell, k \in \mathbb{N}_0$ und $c_1, \ldots, c_k \in K^\times$ ist. □

Bemerkung 14.3.
Für $A \in M_{n\times n}(K)$ gilt die folgende Dichotomie:
Fall 1: r.z.S.F.(A) hat eine Nullzeile oder **Fall 2:** r.z.S.F$(A) = I_n$
(siehe Skript 7 Lineare Algebra I; Bemerkung 7.3).
Also erhalten wir hier auch eine Dichotomie:
Fall 1: $\delta(A) = \Delta_A 0 = 0$ oder **Fall 2:** $\delta(A) = \Delta_A\delta(I_n)$.

Korollar 14.4.
$\delta \neq 0$ genau dann, wenn $\delta(I_n) \neq 0$.

Beweis:
"$\Leftarrow$": Klar.

"$\Rightarrow$": $\delta(I_n) = 0 \to \delta(A) = 0$ in beiden Fällen (1) und (2). □

Korollar 14.5.
Seien $\delta \neq 0, A \in M_{n\times n}(K)$. Es gilt $\delta(A) \neq 0$ genau dann, wenn A invertierbar ist.

Beweis:
Folgt unmittelbar aus Lemma 14.2 und Korollar 14.4 weil: A ist invertierbar $\Leftrightarrow$ r.z.S.F.$(A) = I_n$ (siehe Skript 9 Lineare Algebra I; Satz 9.8). □

Definition 14.6. und Notation
$\mathbb{A} := alt^{(n)}(K^n) :=$ die Menge der n-linearen alternierenden Formen auf K^n.

Bemerkung 14.7.
$\mathbb{A}$ ist ein K-Vektorraum; er ist ein Unterraum von $L^{(n)}(K^n \times \cdots \times K^n; K)$.

Korollar 14.8.
Seien δ_1, δ_2 n-lineare alternierende Formen auf K^n. Es gilt $\delta_1 = \delta_2$ genau dann, wenn $\delta_1(e_1, \ldots, e_n) = \delta_2(e_1, \ldots, e_n)$.

Beweis:
Wir erinnern daran, dass $(e_1, \ldots, e_n)$ die Standard-Basis bezeichnet. Wir haben also $\delta_1 - \delta_2 \in \mathbb{A}$, und $(\delta_1 - \delta_2)(I_n) = 0$. Aus Korollar 14.4 folgt $\delta_1 - \delta_2 = 0$. □

Korollar 14.9.
$\dim(alt^{(n)}(K^n)) \leq 1$.

Beweis:
Sei $\delta_1 \neq 0, \delta_1 \in \mathbb{A}$ fest. Sei $\delta_2 \in \mathbb{A}$. Sei $A \in M_{n\times n}(K)$ wie im Fall 2 von Bemerkung 14.3.

Es gilt $\delta_2(A) = \Delta_A \delta_2(I_n) = \Delta_A \dfrac{\delta_2(I_n)}{\delta_1(I_n)} \delta_1(I_n)$. $(*)$

Setze $d := \dfrac{\delta_2(I_n)}{\delta_1(I_n)} \in K$.

Aus $(*)$ folgt nun: $\delta_2(A) = d\Delta_A \delta_1(I_n) = d\delta_1(A)$ für alle $A \in M_{n\times n}(K)$.
Also ist $\delta_2 = d\delta_1$. □

Wir werden nun zeigen, dass ein $\delta \in \mathbb{A}$ existiert mit $\delta(I_n) = 1$. Solch ein Funktional δ ist wegen Korollar 14.8 notwendig eindeutig! Hierzu brauchen wir folgendes:

Formelberechnung

Seien $\delta \in \mathbb{A}$ und $A = (a_{ij})_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq n} \in M_{n\times n}(K)$; $A = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$.

Wir schreiben $z_i = \sum_{j_i=1}^{n} a_{ij_i} e_{j_i}$ in der Standardbasis.
Wir berechnen:

$$\delta(A) = \delta\left(\sum_{j_1=1}^{n} a_{1j_1}e_{j_1}, \ldots, \sum_{j_n=1}^{n} a_{nj_n}e_{j_n}\right) \overset{n\text{-lin.}}{=} \tag{$*$}$$

$$\sum_{j_1,\ldots,j_n=1}^{n} a_{1j_1}\ldots a_{nj_n}\delta(e_1,\ldots,e_n). \tag{$**$}$$

Für jeden Summand in $(**)$, betrachte nun die Abbildung:

$$\begin{array}{rcl} \{1,\ldots,n\} & \longrightarrow & \{1,\ldots,n\} \\ i & \longmapsto & j_i \end{array}.$$

- Wenn diese Abbildung **nicht** injektiv ist, dann gibt es eine Wiederholung in $(j_1,\ldots,j_n)$ und damit ist $\delta(e_{j_1},\ldots,e_{j_n}) = 0$.
- Wenn diese Abbildung injektiv ist, dann ist sie eine Permutation $\pi \in S_n$ und damit ist $\delta(e_{j_1},\ldots,e_{j_n}) = \delta(e_{\pi(1)},\ldots,e_{\pi(n)}) = sign(\pi)\delta(e_1,\ldots,e_n)$.

Also können wir nun $(**)$ umschreiben.

$$\begin{array}{rcl} (**) & = & \sum_{\pi\in S_n} sign(\pi) a_{1\pi(1)}\ldots a_{n\pi(n)}\delta(e_1,\ldots,e_n) \\ & = & \sum_{\pi\in S_n} sign(\pi) a_{1\pi(1)}\ldots a_{n\pi(n)}\delta(I_n) \\ & = & \delta(I_n)\sum_{\pi\in S_n} sign(\pi) a_{1\pi(1)}\ldots a_{n\pi(n)} \qquad (***) \end{array}$$

Wir sehen also, dass $\delta(I_n) = 1$ eine Formel für δ liefert wie in $(***)$:

Satz 14.10.
Definiere für $A = (a_{ij})_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq n}$:

$$\delta(A) := \sum_{\pi\in S_n} sign(\pi) a_{1\pi(1)}\ldots a_{n\pi(n)} \tag{det}$$

Dann ist δ eine n-lineare alternierende Form und erfüllt $\delta(I_n) = 1$.

Beweis:

- n-linear? Berechne
  $sign(\pi)\left[(a_{1\pi(1)} + da'_{1\pi(1)})a_{2\pi(2)}\ldots a_{n\pi(n)}\right] =$
  $sign(\pi)\left[(a_{1\pi(1)}a_{2\pi(2)}\ldots a_{n\pi(n)}) + d(a'_{1\pi(1)}a_{2\pi(2)}\ldots a_{n\pi(n)})\right]$
  usw. . . . . Übungsaufgabe.

- alternierend?
  Sei $z_1 = z_2$, i.e. $a_{1j} = a_{2j}$ für alle $1 \leq j \leq n$, i.e. $a_1\pi(j) = a_{2\pi(j)}$ für alle $\pi \in S_n$ und $1 \leq j \leq n$.

Berechne (mit $S_n = A_n \uplus A_n(12)$)

$$\begin{aligned}
\delta(A) &= \sum_{\pi \in A_n \uplus A_n(12)} sign(\pi)\ a_{1\pi(1)}\ a_{2\pi(2)}\ a_{3\pi(3)} \cdots a_{n\pi(n)} \\
&= \left(\underbrace{\sum_{\pi \in A_n} sign(\pi)\ a_{1\pi(1)}\ a_{2\pi(2)}\ a_{3\pi(3)} \cdots a_{n\pi(n)}}_{\text{(I)}} \right) \\
&\quad + \left(\underbrace{\sum_{\pi \in A_n} [sign(\pi)(12)]\ a_{1\pi(12)(1)}\ a_{2\pi(12)(2)}\ a_{3\pi(12)(3)} \cdots a_{n\pi(12)(n)}}_{\text{(II)}} \right)
\end{aligned}$$

In der Summe (II) bekommen wir:

$$\sum_{\pi \in A_n} [-sign(\pi)]\ a_{1\pi(2)}\ a_{2\pi(1)}\ a_{3\pi(3)} \cdots a_{n\pi(n)} =$$

$$\sum_{\pi \in A_n} [-sign(\pi)]\ a_{1\pi(1)}\ a_{2\pi(2)}\ a_{3\pi(3)} \cdots a_{n\pi(n)}$$

Wir sehen also, die Terme kürzen sich weg, i.e. in (I) bzw. (II): $a_{1\pi(1)}\ a_{2\pi(2)} \cdots a_{n\pi(n)}$ und $-a_{1\pi(1)}\ a_{2\pi(2)} \cdots a_{n\pi(n)}$, i.e. (I) + (II) = 0.

- Sei $0 \neq A$ diagonal; also $i \neq j \Rightarrow a_{ij} = 0$. Das heißt, dass die einzige Permutation, die einen Beitrag $\neq 0$ bringt, diejenige ist, für die $i = \pi(i)$ für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$ gilt, i.e. $\pi = (1)$ die Identität in S_n. Es bleibt also nur ein Produkt in (det) übrig, nämlich $a_{11}a_{22}\cdots a_{nn} = \delta(A)$, insbesondere ist $\delta(I_n) = 1$. □

Korollar 14.11.
$\dim alt^{(n)}(K^n) = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Definition 14.12. Die *Determinante* (Funktionale) ist die eindeutige n-lineare alternierende Form det auf K^n, wofür $\det(I_n) = 1$ gilt.

15 Script zur Vorlesung: Lineare Algebra II

Prof. Dr. Salma Kuhlmann

In diesem Skript werden wir einige Eigenschaften der Determinante, die wir im LA I Skriptskizze 23 gelernt und bewiesen hatten, hier anderweitig beweisen.

Korollar 15.1.
Für alle $\delta \in alt^{(n)}(K^n)$ und $A \in M_{n\times n}(K)$ gilt $\delta(A) = \det(A)\delta(I_n)$.

Beweis:
Da $\det \in alt^{(n)}(K^n)$ und $\det \neq 0$, ist $\dim(alt^{(n)}(K^n)) = 1$ (siehe Korollar 14.11).
Sei $\delta \in alt^{(n)}(K^n)$. Also ist $\delta = d\det$ für $d \in K$.
Nun muss gelten $\delta(I_n) = d\det(I_n)$, also $d = \delta(I_n)$. □

Bemerkung 15.2.
Sei R ein kommutativer Ring mit 1. $\delta \in alt^{(n)}(R^n)$ ist analog definiert. Der Hauptsatz 14.10 gilt auch in diesem erweiterten Rahmen:
Sei $A \in M_{n\times n}(R)$; $A = (a_{ij})_{1\le i\le n, 1\le j\le n}$. Definiere:

$$\det(A) := \sum_{\pi\in S_n} sign(\pi) a_{1\pi(1)} \cdots a_{n\pi(n)}.$$

Dann ist det die eindeutige Funktionale $\delta \in alt^{(n)}(R^n)$ mit der Eigenschaft $\delta(I_n) = 1$.

Beispiel 15.3.
Setze $R := K[x]$, und $A = \begin{pmatrix} x & 0 & -x^2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & x^3 \end{pmatrix}$.
Sei $\delta \in alt^{(3)}(R^3)$ so definiert: $\delta(A) = \delta(x\varepsilon_1 - x^2\varepsilon_3, \varepsilon_2, \varepsilon_1 + x^3\varepsilon_3)$,
wobei $\varepsilon_1 = (1,0,0), \varepsilon_2 = (0,1,0)$ und $\varepsilon_3 = (0,0,1)$. Wir berechnen:

$$\begin{aligned} \delta(A) &= x\delta(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_1 + x^3\varepsilon_3) - x^2\delta(\varepsilon_3, \varepsilon_2, \varepsilon_1 + x^3\varepsilon_3) \\ &= x\delta(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_1) + x^4\delta(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) - x^2\delta(\varepsilon_3, \varepsilon_2, \varepsilon_1) - x^5\delta(\varepsilon_3, \varepsilon_2, \varepsilon_1) \\ &= (x^4 + x^2)\delta(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3). \end{aligned}$$

Erinnerung:
$(A^t)_{ji} = A_{ij}$ oder $a^t_{ji} = a_{ij}$.

Satz 15.4.
Sei $A \in M_{n\times n}(R)$. Es gilt: $\det(A) = \det(A^t)$.

Beweis:
Betrachte
$$\prod_{i=1}^{n} a_{i\pi(i)} = \prod_{i,j=1,\ j=\pi(i)}^{n} a_{ij} = \prod_{i,j=1,\ i=\pi^{-1}(j)}^{n} a_{ij} = \prod_{j=1}^{n} a_{\pi^{-1}(j)j} = \prod_{j=1}^{n} a^t_{j\pi^{-1}(j)}$$
für $\pi \in S_n$.
Wir berechnen nun
$\det(A) = \sum_{\pi\in S_n} sign(\pi) \prod_{i=1}^{n} a_{i\pi(i)} = \sum_{\pi^{-1}\in S_n} sign(\pi^{-1}) \prod_{j=1}^{n} a^t_{j\pi^{-1}(j)} = \det(A^t).$ □

Satz 15.5.
$\det(AB) = \det(A)\det(B)$ für $A, B \in M_{n\times n}(R)$.

Beweis:
Fixiere $B \in M_{n\times n}(R)$ und setze $A = \begin{pmatrix} z_1 \\ --- \\ \cdots \\ --- \\ z_n \end{pmatrix}$.
Definiere $\delta_B(A) := \det(AB)$; also $\delta_B(z_1, \ldots, z_n) = \det(z_1B, \ldots, z_nB)$.
Dann ist δ_B n-linear und alternierend:

n-linear?
$\delta_B(z_1 + cz_1', z_2, \ldots, z_n) = \det((z_1 + cz_1')B, \ldots, z_nB) =$
$\det(z_1B, z_2, B, \ldots, z_nB) + c\det(z_1'B, z_2B, \ldots, z_nB)$ (weitere Details als ÜA).

alternierend?
$\delta_B(z_1, z_1, \ldots, z_n) = \det(z_1B, z_1B, \ldots, z_nB) = 0$ (weitere Details als ÜA).

Also $\delta_B \in alt^{(n)}(R^n)$ und Korollar 15.1 liefert $\delta_B(A) = \det(A)\delta_B(I_n) = \det(A)\det(B)$. □

Korollar 15.6.
Sei A invertierbar. Es gilt $\det(A^{-1}) = [\det(A)]^{-1}$.

Beweis:
$\det(AA^{-1}) = \det(A)\det(A^{-1}) = \det(I_n) = 1.$ □

Notation (Erinnerung):
Sei $A \in M_{n\times n}(R)$ und $i, j \in \{1, \ldots, n\}$. Wir bezeichnen mit $A[i \mid j]$ die $(n-1)\times(n-1)$-Matrix, die man nach Entfernung der i-ten Zeile und j-ten Spalte von A bekommt, und setzen $D_{ij}(A) := \det(A[i \mid j])$.

Satz 15.7.
Fixiere j mit $1 \le j \le n$ Setze
$$\delta(A) := \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} D_{ij}(A).$$
Dann ist $\delta \in alt^{(n)}(R^n)$ und $\delta(I_n) = 1$.

Beweis:
n-linear? Für i, j ist $a_{ij}D_{ij}(A)$ n-linear (ÜA). Da eine lineare Kombination von n-linearen wieder n-linear ist, folgt δ n-linear.

alternierend?

Sei $A = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$ und seien $z_k = z_\ell$ für $k < \ell$.

Für $i \neq k$ und $i \neq \ell$, hat $A[i \mid j]$ zwei gleiche Zeilen, also ist $D_{ij}(A) = 0$. Wir berechnen:

$$\begin{aligned} \delta(A) &= (-1)^{k+j} a_{kj} D_{kj}(A) + (-1)^{\ell+j} a_{\ell j} D_{\ell j}(A) \\ &= (-1)^{k+j} a_{kj} D_{kj}(A) + (-1)^{\ell+j} a_{kj} D_{\ell j}(A) \end{aligned} \qquad (*)$$

weil $a_{\ell j} = a_{kj}$ ist.

Betrachte:

$$A[k \mid j] = \begin{pmatrix} z_1^- \\ \vdots \\ z_{k-1}^- \\ z_{k+1}^- \\ \vdots \\ z_\ell^- \\ \vdots \\ z_n^- \end{pmatrix} \text{ und } A[\ell \mid j] = \begin{pmatrix} z_1^- \\ \vdots \\ z_k^- \\ \vdots \\ z_{\ell-1}^- \\ z_{\ell+1}^- \\ \vdots \\ z_n^- \end{pmatrix}$$

(I) (II)

- Die $(\ell - 1)$-te Zeile von (I) ist $z_\ell^- = z_k^-$ und
- die k-te Zeile von (II) ist ebenfalls $z_\ell^- = z_k^-$.

Ein Vergleich von (I) und (II) ergibt: $A[k \mid j]$ und $A[\ell \mid j]$ haben die gleichen Zeilen, bis auf die Permutation der Zeilen!!

Man kann durch wiederholte Zeilenumformungen aus Typ 1 $A[\ell \mid j]$ aus $A[k \mid j]$ erhalten, indem man die $(\ell - 1)$-te Zeile in (I) bis zur k-ten Zeile in (II) rückt. Dafür benötigt man $(\ell - 1) - k$ Transpositionen, genauer benötigen wir dafür die Permutationen $(\ell - 1\ \ell - 2)$, dann $(\ell - 2\ \ell - 3)$, $\ldots$, $(\ell - (\ell - k - 1)\ \ell - (\ell - k))$ i.e. bis $(k + 1\ k)$.

Setze $\pi := (k+1\ k) \cdots (\ell-1\ \ell-2)$. Dann ist $sign(\pi) = (-1)^{(\ell-1)-k}$. Also $D_{\ell j}(A) = (-1)^{(\ell-1)-k} D_{kj}(A)$ (siehe Lemma 14.1 (ii)).

Zurück zu $(*)$:

$$\delta(A) = (-1)^j [\underbrace{(-1)^k a_{kj} D_{kj}(A)}_{\text{1. Term}} + \underbrace{(-1)^{2\ell-1-k} a_{kj} D_{kj}(A)}_{\text{2. Term}}]$$

Aber $(-1)^k = -[(-1)^{2\ell-1-k}] = (-1)^{2(\ell-1)-k}$.

Also kürzen sich 1. Term und 2. Term weg und damit ist $\delta(A) = 0$ wie behauptet.

Wir berechnen nun $\delta(I_n) = 1$. Für $A = I_n$; $a_{ij} = 0$ wenn $i \neq j$. Also betrachte nun $i = j$, i.e. $a_{jj} = 1$. Wir bekommen $\delta(I_n) = (-1)^{2j} \cdot a_{jj} \det(I_{n-1}) = (-1)^{2j} \cdot 1 \cdot 1 = 1$. □

Aus Satz 15.7 erhalten wir unmittelbar LA I Satz 23.5:

Korollar 15.8. (Spaltenentwicklung)
Sei $A \in M_{n\times n}(R)$. Für jedes $1 \leq j \leq n$ gilt

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} D_{ij}(A).$$

16 Script zur Vorlesung: Lineare Algebra II

Prof. Dr. Salma Kuhlmann

In diesem Skript werden wir weitere Eigenschaften und Formelberechnungen für die Determinante finden, und damit Kapitel II beenden.

Ansatz von Skript 15: A $n \times n$ über R, A_{ij} (auch a_{ij}) bezeichnet den ij-ten Koeffizient von A.

Definition 16.1.
$C_{ij} := (-1)^{i+j} \det A[i \mid j] = (-1)^{i+j} D_{ij}$ ist der ij-te *Kofaktor von A*.

Korollar 15.8 besagt also, dass für jede j-te Spalte gilt: $\det(A) = \sum\limits_{i=1}^{n} A_{ij} C_{ij}$.

Lemma 16.2.
$k \neq j \Rightarrow \sum\limits_{i=1}^{n} A_{ik} C_{ij} = 0$.

Beweis:
Ersetze die j-te Spalte von A durch ihre k-te Spalte und nenne die so erhaltene Matrix B. Es gilt also: $B_{ij} = A_{ik}$ für alle i. B hat zwei gleiche Spalten, also ist $\det(B) = 0$. Nun ist $B[i \mid j] = A[i \mid j]$. Also:

$$\begin{aligned} 0 &= \det(B) \\ &= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j}\ B_{ij}\ \det B[i\ |j] \\ &= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j}\ A_{ik}\ \det A[i\ |j] \\ &= \sum_{i=1}^{n} A_{ik}\ C_{ij} \end{aligned}$$

Damit ist die Behauptung bewiesen. □

Wir fassen zusammen:

Korollar 16.3.
Für alle $j, k \in \{1, \ldots, n\}$ gilt: $\sum\limits_{i=1}^{n} A_{ik}\ C_{ij} = \delta_{jk}\ \det(A)$ $(*)$

Definition 16.4.
Die zu A *adjungierte Matrix* $adj(A)$ is die Transponierte der Matrix der Kofaktoren von A, das heißt $(adj\ A)_{ij} := C_{ji} = (-1)^{i+j} \det A[j \mid i]$.

Die Formeln für Matrix-Produkte, gemeinsam mit $(*)$ergeben:

Korollar 16.5.
$(adj\ A)A = \det(A) I_n$. $(**)$

Lemma 16.6.
$A(adj\ A) = \det(A)I_n$.

Beweis:
Es gilt offensichtlich, dass $A^t[i \mid j] = A[j \mid i]^t$.
Wir berechnen wegen Satz 15.4:
$(-1)^{i+j} \det A^t[i \mid j] = (-1)^{i+j} \det A[j \mid i]$
(ij-te Kofaktor von A^t = ji-te Kofaktor von A).
Also $adj(A^t) = (adj A)^t$ $(***)$

Nun impliziert $(**)$ für A^t: $(adj A^t)A^t = (\det A^t)I_n = (\det A)I_n$.
Zusammen mit $(***)$ erhalten wir $(adj A)^t A^t = [A(adj\ A)]^t = (\det A)I_n = A(adj\ A)$.
Damit ist die Behauptung bewiesen. □

Korollar 16.7.
$A(adj A) = (\det A)I_n$ und $(adj A)A = \det(A)I_n$ $(\dagger)$

Erinnerung (LA I Skript 9):
$A \in M_{n\times n}(R)$ ist über R invertierbar, falls es $B \in M_{n\times n}(R)$ gibt, so dass $AB = BA = I_n$.
Genauso wie für den Fall wo $R = K$ ein Körper ist, gilt: Wenn B existiert, dann ist B eindeutig; $B = A^{-1}$.

Satz 16.8.
$A \in M_{n\times n}(R)$ ist über R invertierbar genau dann, wenn $\det(A) \in R^\times$ (eine Einheit in R). Insbesondere wenn $R = K$ ein Körper ist; dann ist A invertierbar genau dann, wenn $\det(A) \neq 0$, und wenn $R = K[x]$; dann ist A invertierbar über $K[x]$ genau dann, wenn $\det(A) \in K^\times$.
Ist A invertierbar, so ist $A^{-1} = \det(A)^{-1} adj(A)$.

Beweis:
Aus $(\dagger)$ sehen wir: $\det(A)$ invertierbar in R (i.e., eine Einheit von R) $\Rightarrow A$ invertierbar über R und $A^{-1} = (\det A)^{-1} adj A$.
Umgekehrt: A invertierbar $\Rightarrow AA^{-1} = I_n \Rightarrow \det(AA^{-1}) = 1 \Rightarrow \det(A)\det(A^{-1}) = 1 \Rightarrow \det(A)$ ist eine Einheit in R.
Für $R = K[x]$: $f, g \in K[x]$; $fg = 1 \Rightarrow \deg f + \deg g = 0 \Rightarrow \deg f = \deg g = 0$.
Also sind die Einheiten von R die Skarlarpolynome, die ungleich 0 sind. □

Beispiel 16.9.
$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

$\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$

$adj(A) = \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{Z})$

$\det(A) = -2$. A ist nicht invertierbar über $\mathbb{Z}$. A ist aber invertierbar als Matrix mit Einträgen aus $\mathbb{Q}$ und $A^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$.

Beispiel 16.10.
$R = \mathbb{R}[x]$

$A = \begin{pmatrix} x^2+x & x+1 \\ x-1 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad B = \begin{pmatrix} x^2-1 & x+2 \\ x^2-2x+3 & x \end{pmatrix}$

$\det(A) = x+1$ $\quad \det B = -6$
A nicht invertierbar $\quad B$ invertierbar

Lemma 16.11.
Ähnliche Matrizen haben gleiche Determinanten.

Beweis
$B = P^{-1}\ A\ P$ für $A, B \in M_{n\times n}(K)$

$\det B = \det(P^{-1}\ AP) = \det(P)^{-1}\det(P)\det(A) = \det(A)$ □

Wegen Lemma 16.11 können wir nun folgendes definieren:

Definition 16.12.
Sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum, $\dim(V) = n$ und $T : V \longrightarrow V$ ein linearer Operator. Wir definieren $\det(T) := \det([T]_{\mathcal{B}})$ für eine beliebige Basis $\mathcal{B}$ von V.

Wir beenden das Skript, und somit das Kapitel, mit einer nützlichen Formel:

Satz 16.13. (Cramer's Regel)
Sei $A \in M_{n\times n}(K)$ mit $\det(A) \neq 0$ und $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in K^{n\times 1}$.
Betrachte das lineare Gleichungssystem $AX = Y$. Dann kann man seine eindeutige Lösung $X = A^{-1}Y$ so beschreiben: $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, wobei $x_j = \frac{\det B_j}{\det A}$ und B_j die $n \times n$-Matrix ist, die man erhält, wenn man die $j-te$ Spalte von A durch Y ersetzt.

Beweis:
Es gilt $adj(A)AX = adj(A)Y$, also (wegen Korollar 16.7) gilt: $(\det A)X = adj(A)Y$.
Also $(\det A)x_j = \sum_{i=1}^{n}(adj\ A)_{ji}y_i$.
Damit gilt für $1 \leq j \leq n$, dass $(\det A)x_j = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j}y_i \det A[i \mid j] = \det B_j$. □

17 Script zur Vorlesung: Lineare Algebra II

Prof. Dr. Salma Kuhlmann

KAPITEL III: NORMALFORMEN.

In diesem Kapitel werden wir die möglichen Matrixdarstellungen für lineare Operatoren T auf einem K-Vektorraum V noch genauer untersuchen, als wir es in der LA I (Kapitel 3; ab Skript 20) gemacht hatten. Wir werden uns darum bemühen zu verstehen, ob wir besonders "schöne" Matrixdarstellungen finden können. Das heißt, wir werden versuchen besonders "geeignete" Basen für T und V zu finden, wenn das möglich ist. In Skript 17 fangen wir damit an.

§ 9 Eigenwerte und Eigenvektoren

Sei V ein n-dimensionaler K-Vektorraum.

Definition 17.1.

(a) Sei $T \in \mathcal{L}(V, V)$. Dann ist $c \in K$ ein *Eigenwert von T*, falls ein $\alpha \in V$ existiert mit $\alpha \neq 0$ und
$$T(\alpha) = c\alpha.$$

(b) Sei $\alpha \in V$ und $T(\alpha) = c\alpha$, dann heißt α *Eigenvektor* (zum Eigenwert c).

(c) $W_c := \{\alpha \in V \mid T(\alpha) = c\alpha\}$ ist ein Unterraum, der *Eigenraum* (zum Eigenwert c).

Bemerkung 17.2.
$W_c = \ker(T - cI)$, d.h. $W_c = \{\alpha \mid T(\alpha) = c\alpha\} = \{\alpha \mid (T - cI)\alpha = 0\}$.

Wir folgern aus Satz 16.8, Bemerkung 17.2 und Definition 17.1:

Satz 17.3.
Seien $T \in \mathcal{L}(V, V), c \in K$. Äquivalent sind:

(i) c ist Eigenwert von T.

(ii) $(T - cI)$ ist nicht invertierbar.

(iii) $\det(T - cI) = 0$.

Satz 17.4.
$\det(T - xI)$ ist ein normiertes Polynom von Grad $n = \dim(V)$. Die Eigenwerte von T sind genau dessen Nullstellen, T kann also höchstens n Eigenwerte in K haben.

Beweis:
Sei $\mathcal{B}$ eine Basis von V. Sei $A \in M_{n\times n}(K)$, $A = [T]_{\mathcal{B}}$. Es ist $xI - A = [xI - T]_{\mathcal{B}}$.
Nun ist

$$B := xI - A = \begin{pmatrix} x - a_{11} & & -a_{1n} \\ -a_{21} & \ddots & \\ & & x - a_{nn} \end{pmatrix} \text{ mit } b_{ii} = (x - a_{ii}).$$

Also sind die Einträge von B Polynome vom Grad 0 oder 1 oder das Nullpolynom und
$\det B = \sum_{\tau\in S_n} (sign\ \tau)\ b_{1\tau(1)} \cdots b_{n\tau(n)}$.
Wir berechnen:
$\deg\ (b_{1\tau(1)} \cdots b_{n\tau(n)}) = |\{i \in \{1,\dots,n\} : \tau(i) = i\}|$.

Also ist $\prod_{i=1}^{n}(x - a_{ii})$ der einzige Term vom Grad n und somit der Hauptterm. Wir sehen also, dass
$\deg\left(\sum_{\tau}(sign\ \tau)\ b_{1\tau(1)} \cdots b_{n\tau(n)}\right) = n$ und außerdem, dass $\det(xI - A)$ ein normiertes Polynom ist. Die letzte Aussage folgt wegen Satz 17.3 und Korollar 4.3. □

Definition 17.5.
$c \in K$ ist ein Eigenwert von $A \in M_{n\times n}(K)$, falls $\det(cI - A) = 0$. Also sind die Eigenwerte von A die Nullstellen von $\det(xI - A)$.

Definition 17.6.
$f(x) := \det(xI - A)$ ist das charakteristische Polynom von A.

Lemma 17.7.
Ähnliche Matrizen haben das gleiche charakteristische Polynom.

Beweis:
Für $B = P^{-1}AP$ gilt
$\det(xI-B) = \det(xI-P^{-1}AP) = \det(P^{-1}(xI-A)P) = \det P^{-1}\det(xI-A)\det P = \det(xI-A)$. □

Definition 17.8.
Sei V endlich dim; $T \in \mathcal{L}(V,V)$.

$$\text{Char. Pol. } (T) := \text{ Char. Pol. } ([T]_{\mathcal{B}})$$

für irgendeine Basis $\mathcal{B}$ von V (und damit für jede Basis).

Beispiel 17.9.

(*i*) $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$
hat keine reelle Eigenwerte, weil $\det(xI - A) = x^2 + 1$ keine reellen Nullstellen hat.

(*ii*) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$

$$\text{Char. Pol. } (A) = \begin{vmatrix} x-3 & -1 & 1 \\ -2 & x-2 & 1 \\ -2 & -2 & x \end{vmatrix} = x^3 - 5x^2 + 8x - 4 = (x-1)(x-2)^2.$$

Eigenwerte $c = 1,\ c = 2 \in \mathbb{R}$.

- $c = 1 \quad \ker(A - I) := W_1$

$A - I = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ hat Rang = 2, also $\dim W_1 = 1$.

Wir wollen eine Basis für W_1 finden. Löse

$(A - I)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\alpha_1 = (1, 0, 2)$ ist eine Lösung und $\{\alpha_1\}$ ist eine Basis für W_1.

- $c = 2 \quad \ker(A - 2I) := W_2$

$A - 2I = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ hat Rang = 2, also $\dim W_2 = 1$.

Finde Lösung wie oben: $\alpha_2 = (1, 1, 2)$ und $\{\alpha_2\}$ ist eine Basis für W_2.

Lemma 17.10.
Seien c_i für $i = 1, \ldots k$ Eigenwerte von T, und nehme an, dass $c_i \neq c_j$ für alle $i \neq j,\ i, j \in \{1 \ldots, k\}$. Sei $v_i \neq 0; v_i \in V$ ein Eigenvektor zum Eigenwert c_i. Dann ist $\{v_1, \ldots, v_k\}$ linear unabhängig.

Beweis:
Bemerke, dass $v \in V, v \neq 0 \Rightarrow v$ kann nicht Eigenvektor zu verschiedenen Eigenwerten sein.
Wir führen einen Beweis per Induktion: $k = 2$.
Ist $v_2 = cv_1$, so ist $v_2 \in W_{c_1}$, also ist v_2 ein Eigenvektor zu c_1 und $c_2 \neq c_1$. Widerspruch.
Indutkionsannahme gelte für $k - 1$.
Seien $v_1, \ldots, v_k$ linear abhängig. OE haben wir also $v_k = \sum_{i=1}^{k-1} v_i$.

$T(v_k) = c_k v_k = c_k \sum_{i=1}^{k-1} v_i$ und $T(v_k) = \sum_{i=1}^{k-1} T(v_i) = \sum_{i=1}^{k-1} c_i v_i$

$\Rightarrow c_k \sum_{i=1}^{k-1} v_i = \sum_{i=1}^{k-1} c_i v_i$

$\Rightarrow \sum_{i=1}^{k-1} (c_k - c_i) v_i = 0$

$\Rightarrow c_k - c_i = 0 \Rightarrow c_k = c_i$ (mit $i = 1, \ldots, k-1$).
Widerspruch. □

Korollar 17.11.
Seien $\dim V = n, T \in \mathcal{L}(V,V)$. Nimm an, dass T n-verschiedene Eigenwerte $d_1, \ldots, d_n$ in K hat. Dann hat V eine Basis $\mathcal{D}$, bestehend aus Eigenvektoren von T.

Definition 17.12.
Seien $\dim V = n, T \in \mathcal{L}(V,V)$. T ist diagonalisierbar (über K), falls V eine Basis bestehend aus Eigenvektoren von T hat.

Bemerkung 17.13.
Seien $d_1, \ldots, d_n$ verschiedene Eigenwerte von T und $\mathcal{D}$ eine Basis wie in Korollar 17.11. Dann ist $[T]_{\mathcal{D}}$ diagonal.

18 Script zur Vorlesung: Lineare Algebra II

Prof. Dr. Salma Kuhlmann

In diesem Skript werden wir das Charakteristische Polynom weiter analysieren, und in Satz 18.3 ein wichtiges Kriterium für die Diagonalisierbarkeit folgern.

Bemerkung 18.0.
$\dim V = n, T \in \mathcal{L}(V,V)$ und $d_1,\ldots,d_n$ sind verschiedene Eigenwerte, α_i ist Eigenvektor zum Eigenwert d_i. Setze $\mathcal{D} \coloneqq \{\alpha_1,\ldots,\alpha_n\}$. Dann ist $\mathcal{D}$ eine Basis und

$$[T]_{\mathcal{D}} = \begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n \end{pmatrix}$$

eine diagonale Matrix.

Korollar 18.1.
Sei $\dim V = n, T \in \mathcal{L}(V,V)$ und $d_1,\ldots,d_k$ verschiedene Eigenwerte. Für alle $i \in \{1,\ldots,k\}$ sei $\mathcal{B}_i \subseteq W_{d_i}$ linear unabhängig. Dann ist $\mathcal{B} \coloneqq \bigcup_{i=1}^k \mathcal{B}_i$ auch linear unabhängig.

Beweis:
Sei $L \coloneqq \{v_1,\ldots,v_\ell\} \subseteq \mathcal{B}$. Betrachte eine lineare Kombination $\sum_{j=1}^{\ell} c_j v_j$. Nun setze $L_i \coloneqq L \cap \mathcal{B}_i$ und setze $\alpha_i \coloneqq \sum_{v_j \in L_i} c_j v_j$ $(*)$
falls $L_i \neq \varnothing$ (und $\alpha_i \coloneqq 0$ per Konvention, falls $L_i = \varnothing$). Dann ist $\alpha_i \in W_{d_i}$.
Also ist $0 = \sum_{j=1}^{\ell} c_j v_j = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i$ nur möglich, wenn $\alpha_i = 0$ für alle $i = 1,\ldots,k$.
(Da sonst die $\alpha_i \neq 0$ Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten **und** gleichzeitig linear abhängig wären. Widerspruch zu Lemma 17.10!)
Nun sind die v_j in $(*)$ linear unabhängig. Also $c_j = 0$ für alle j wie behauptet. □

Lemma 18.2.
Sei $\dim V = n, T \in \mathcal{L}(V,V)$ und $d_1,\ldots,d_k$ die verschiedenen Eigenwerte von T. Es gilt: T ist diagonalisierbar $\Leftrightarrow \sum_{j=1}^{k} \dim W_{d_j} = n$.

Beweis:
"⇒" Sei $\mathcal{B}$ eine Basis von Eigenvektoren. Setze $\mathcal{B}_j \coloneqq \mathcal{B} \cap W_{d_j}$.

Also ist $\mathcal{B} = \dot{\bigcup}_{j=1}^{k} \mathcal{B}_j$.

Setze $\ell_j \coloneqq |\mathcal{B}_j|$. Also ist $n = |\mathcal{B}| = \sum_{j=1}^{k} \ell_j$.

Behauptung:
$\ell_j = \dim W_{d_j}$.
Es ist klar, dass $\ell_j \leq \dim W_{d_j}$. Ist $\ell_i < \dim W_{d_i}$, dann existiert ein $\beta \in W_{d_i}$ mit $\mathcal{B}_i' := \mathcal{B}_i \cup \{\beta\}$ linear unabhängig. Aber dann ist

$$\mathcal{B}' = \mathcal{B} \cup \{\beta\} = \dot{\bigcup_{j \neq i}} \mathcal{B}_j \,\dot{\cup}\, \mathcal{B}_i'$$

linear unabhängig (Korollar 18.1) und $|\mathcal{B}'| = n + 1$. Widerspruch (unmöglich).

"$\Leftarrow$" Sei $\sum_{j=1}^{k} \dim W_{d_j} = n$ und $\mathcal{B}_j$ eine Basis für W_{d_j} für jedes $j = 1, \ldots, k$.

Setze $\mathcal{B} = \dot{\bigcup}_{j=1}^{k} \mathcal{B}_j$. Dann ist $\mathcal{B}$ linear unabhängig (Korollar 18.1)

und $|\mathcal{B}| = \sum_{j=1}^{k} |\mathcal{B}_j| = \sum_{j=1}^{k} \dim W_{d_j} = n$.
Also ist $\mathcal{B}$ eine Basis für V und besteht aus Eigenvektoren von T. Also ist T diagonalisierbar. $\square$

Sei nun $\dim V = n$, $T \in \mathcal{L}(V, V)$ diagonalisierbar, $d_1, \ldots, d_k$ die verschiedenen Eigenwerte und $\mathcal{D}$ eine Basis bestehend aus Eigenvektoren (und geordnet, so dass die ersten Basisvektoren Eigenvektoren zu d_1 sind, d_2 usw.). Dann ist

$$[T]_{\mathcal{D}} = \begin{pmatrix} d_1 & & & & & & \\ & \ddots & & & 0 & & \\ & & d_1 & & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & d_k & & \\ & 0 & & & & \ddots & \\ & & & & & & d_k \end{pmatrix}$$

wobei für alle $i \in \{1, \ldots, k\}$ erscheint d_i ℓ_i-mal mit

$$\ell_i := \dim W_{d_i}$$

und damit ist Char. Pol. $(T) = \prod_{i=1}^{k} (x - d_i)^{\ell_i}$. $(*)$

Umgekehrt, ist Char. Pol. (T) wie in $(*)$ (mit $d_i \neq d_j$ für $i \neq j$ und $\ell_i = \dim W_{d_i}$), dann ist T diagonalisierbar, weil $\sum_{i=1}^{k} \dim W_{d_i} = n$ ist (siehe Lemma 18.2).

Wir haben bewiesen:

Satz 18.3.
Sei V endl. dim., $T \in \mathcal{L}(V, V)$. Es gilt: T ist diagonalisierbar genau dann, wenn Char. Pol. $(T) = \prod_{i=1}^{k} (x - d_i)^{\ell_i}$, wobei die Vielfachheit ℓ_i der Nullstelle d_i $\dim W_{d_i}$ ist.

Terminologie:
$\dim W_d$ wird auch **geometrische Vielfachheit** der Nullstelle d genannt.

Im Allgemeinen gilt:

Satz 18.4.
Sei $\dim(V)$ endlich, $T \in \mathcal{L}(V,V)$. Sei d ein Eigenwert von T mit Vielfachheit μ. Es gilt: $\ell := \dim(W_d) \leq \mu$.

Beweis:
Sei $\{\alpha_1,\dots,\alpha_\ell\}$ eine Basis von W_d.
Ergänze zu einer Basis $\mathcal{B} = \{\alpha_1,\dots,\alpha_\ell,\alpha_{\ell+1},\dots\alpha_n\}$ von V.
Es ist

$$A := [T]_{\mathcal{B}} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} d & & 0 & & & \\ & \ddots & & & B & \\ 0 & & d & & & \\ - & - & - & - & - & - \\ & 0 & & & C & \end{array}\right)$$

Wir berechnen Char. Pol. (A) (siehe ÜB):

$$\det(xI-A) = \det\left(\begin{array}{ccc|ccc} x-d & & 0 & & & \\ & \ddots & & & -B & \\ 0 & & x-d & & & \\ - & - & - & - & - & - \\ & 0 & & & xI-C & \end{array}\right) = (x-d)^\ell \det(xI-C)$$

Also ist $\ell \leq \mu$. $\square$

Beispiel 18.5.
• T in den Beispielen 17.9. sind beide **nicht** diagonalisierbar.

$\bullet A = \begin{pmatrix} 5 & -6 & -6 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & -6 & -4 \end{pmatrix} \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$

Char. Pol. $(A) = (x-1)(x-2)^2$.

$d_1 = 1$

$A - I = \begin{pmatrix} 4 & -6 & -6 \\ -1 & 3 & 2 \\ 3 & -6 & -5 \end{pmatrix}$

Rang $(A-I) \neq 3$, weil $\det(A-I) = 0$ ist. Es ist klar, dass Rang $(A-I) \geq 2$. Also Rang $(A-I) = 2$.

$d_2 = 2$

$A - 2I = \begin{pmatrix} 3 & -6 & -6 \\ -1 & 2 & 2 \\ 3 & -6 & -6 \end{pmatrix}$

Rang $(A-2I) = 1$.

Also ist $\dim W_{d_1} = 1$ und $\dim W_{d_2} = 2$ und $\dim W_{d_1} + \dim W_{d_2} = 3$. Also ist T diagonalisierbar: Es existiert eine Basis $\mathcal{D}$ von $\mathbb{R}^3$, so dass

$$[T]_{\mathcal{D}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

19 Script zur Vorlesung: Lineare Algebra II

Prof. Dr. Salma Kuhlmann

In diesem Skript werden wir ein weiteres wichtiges Polynom definieren und die Beziehung zwischen minimalen Polynom und Charakteristischen Polynom untersuchen.

§ 10 Annihilator Ideal

Sei V ein endlich dimensionnaler K-Vektorraum und $T \in \mathcal{L}(V,V)$.

Proposition 19.1.
Es gelten:

(1) $\mathcal{A}(T) := \{p \in K[x] \mid p(T) = 0\}$ ist ein Ideal.

(2) $\mathcal{A}(T) \neq \{0\}$.

Beweis:

(1) Es genügt zu bemerken, dass $(p+q)(T) = p(T) + q(T)$ und $(pq)(T) = p(T)q(T)$, für alle $p, q \in K[x]$.

(2) Setze $n := \dim V$. Betrachte die Elemente $I, T, T^2, \ldots, T^{n^2} \in \mathcal{L}(V,V)$.
Da $\dim \mathcal{L}(V,V) = n^2$, sind diese Elemente notwendig linear abhängig. Also existieren $c_0, \ldots, c_{n^2} \in K$ mit $c_0 I + c_1 T + \cdots + c_{n^2} T^{n^2} = 0$ und c_i nicht alle gleich Null.
Also ist z.B. das Polynom $c_0 + c_1 x + \cdots + c_{n^2} x^{n^2} \in \mathcal{A}(T)$. $\square$

Definition 19.2.
$\mathcal{A}(T)$ heißt *Annihilator Ideal.* Der (eindeutig bestimmte) normierte Erzeuger von $\mathcal{A}(T)$ ist das *minimale Polynom von T*; bezeichnet als Min. Pol. (T).

Bemerkung 19.3.

1. deg (Min. Pol. (T)) $\leq n^2$.

   In Skript 20 werden wir eine bessere obere Schranke bekommen!

2. $p :=$ Min. Pol. (T) ist das normierte Polynom vom kleinsten Grad in $\mathcal{A}(T)$. Es ist also charakterisiert durch:

   (a) $p \in K[x]$

   (b) $p(T) = 0$

   (c) $\deg q < \deg p \Rightarrow q(T) \neq 0$

Definition 19.4.
Für $A \in M_{n\times n}(K)$. sind $\mathcal{A}(A)$ und Min. Pol. (A) analog definiert.

Bemerkung 19.5.

(1) Sei $\mathcal{B}$ eine Basis für V. Für $f \in K[x]$ gilt $[f(T)]_{\mathcal{B}} = f([T]_{\mathcal{B}})$ (ÜB).
Für $A = [T]_{\mathcal{B}}$ gilt also: $f(T) = 0 \Leftrightarrow f(A) = 0$.

(2) Wir halten fest: ähnliche Matrizen haben das gleiche minimale Polynom.

Satz 19.6.
Sei $T \in \mathcal{L}(V,V)$ (oder $A \in M_{n\times n}(K)$). Es gilt: Char. Pol. (T) und Min. Pol. (T) haben (bis auf Vielfachheit) dieselben Nullstellen.

Beweis:
Seien $p :=$ Min. Pol. (T) und $c \in K$. Zu zeigen: $p(c) = 0 \Leftrightarrow c$ ist Eigenwert von T.

"$\Rightarrow$" $p(c) = 0 \Rightarrow p = (x-c)q$; $\deg q < \deg p$. Also ist $q(T) \neq 0$.
Wähle $\beta \in V$ mit $\alpha := q(T)(\beta) \neq 0$.
Es gilt $0 = p(T)(\beta) = (T - cI)q(T)(\beta) = (T - cI)(\alpha)$. Also ist $\alpha \neq 0$ Eigenvektor zum Eigenwert c.

"$\Leftarrow$" Umgekehrt sei $T(\alpha) = c\alpha; \alpha \neq 0, \alpha \in V, c \in K$.
Nun gilt $p(T)(\alpha) = p(c)\alpha$ (ÜB).
Da aber $p(T) = 0$ und $\alpha \neq 0$, folgt daraus $p(c) = 0$. □

Proposition 19.7.
Sei T diagonalisierbar. Dann zerfällt Min. Pol. (T) in verschiedene lineare Faktoren.

Beweis
Sei T diagonalisierbar, $c_1, \ldots, c_k \in K$ die verschiedenen Eigenwerte, setze $p :=$ Min. Pol. (T).
Satz 19.6 impliziert, dass $\deg p \geq k$ ist.
Betrachte das Polynom $q(x) := (x-c_1)\cdots(x-c_k)$. Es gilt: $(T - c_1 I)\cdots(T - c_k I)(\alpha) = 0$ für jeden Eigenvektor α (weil α Eigenvektor zum Eigenwert c_i ist, für ein geeignetes i). Da es eine Basis von Eigenvektoren gibt, ist $q(T) = 0$, also ist $q \in \mathcal{A}(T)$ und damit gilt wegen Bemerkung 19.3 num $p = q$. □

Wir werden später (siehe Satz 23.4) die Umkehrung von 19.7 auch beweisen.

Beispiel 19.8.
Nun berechnen wir das minimale Polynom für das Beispiel 11.9 (ii). Wir bezeichnen das minimale Polynom mit p. Da T nicht diagonalisierbar ist, können wir Proposition 19.7 nicht anwenden, aber Satz 19.6 können wir anwenden.

Da Char. Pol. $(T) = (x-1)(x-2)^2$ ist, hat p die Nullstellen 1 und 2. Wir probieren Polynome der Form
$$(x-1)^k(x-2)^\ell \text{ mit } k \geq 1 \text{ und } \ell \geq 1$$
("prüfen", ob sie T annihilieren).

$(x-1)(x-2)$:
$$(A-I)(A-2I) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 4 & 0 & -2 \end{pmatrix} \neq 0$$
Also ist deg $(p) \geq 3$. Nun probieren wir
$$(x-1)^2(x-2) \text{ oder } (x-1)(x-2)^2$$
$(A-I)(A-2I)^2 = 0$. Also ist hier Char. Pol. $(T) =$ Min. Pol. (T).

Der Satz von Cayley Hamilton, den wir in Skript 20 beweisen, wird uns helfen weniger "prüfen" zu müssen...

20 Script zur Vorlesung: Lineare Algebra II

Prof. Dr. Salma Kuhlmann

In diesem Skript werden wir zunächst den Satz von Cayley Hamilton aussagen und beweisen. Der Satz ist u.a. für die Berechnung von MinPol sehr hilfreich. Wir beenden Abschnitt 10 indem wir die folgende wichtige Frage beantworten: Sei $A \in M_{n\times n}(\mathbb{Q})$. Da $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$ ist auch $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ und sogar $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$. Ändern sich deshalb die charakteristischen und minimalen Polynome von A? Im Abschnitt 11 werden wir den Begriff von Trigonalisierbarkeit (der arme Vetter von Diagonalisierbarkeit) einführen und studieren.

Satz von Cayley Hamilton.
Sei V ein n-dimensionaler K-Vektorraum und $L \in \mathcal{L}(V,V), f := \text{Char. Pol.}(L)$.
Es gilt $f(L) = 0$. Insbesondere teilt min. Pol. (L) das Char. Pol. (L).

Beweis:
Seien $\mathcal{K}$ die Algebra der Polynome in L und $\mathcal{B} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ eine Basis für V.
Setze $A := [L]_{\mathcal{B}}$, das heißt $L(\alpha_i) = \sum_{j=1}^{n} A_{ji}\alpha_j$ für alle $1 \le i \le n$.
Wir schreiben diese Gleichungen um, als

(1) $\sum_{j=1}^{n} (\delta_{ij}L - A_{ji}I)(\alpha_j) = 0$ für alle $1 \le i \le n$.
Sei B die $n \times n$-Matrix mit dem Koeffizienten in der Algebra $\mathcal{K}$ definiert durch

$$B_{ij} := \delta_{ij}L - A_{ji}I.$$

Behauptung: Es ist $\det B = f(L) = 0$. Wir argumentieren wie folgt:

Wir haben $f(x) = \det(xI - A) = \det(xI - A)^t$. Wir berechnen $(xI - A)^t_{ij} = \delta_{ij}x - A_{ji}$. Also ist $(xI - A)^t_{ij}(L) = \delta_{ij}L - A_{ji}I = B_{ij}$. Außerdem gilt $[\det(xI - A)^t](L) = \det[(xI - A)^t(L)]$ (siehe ÜB). Somit gilt

$$f(L) = [\det(xI - A)](L) = [\det(xI - A)^t](L) = \det[(xI - A)^t(L)] = \det B.$$

Wir zeigen nun, dass $\det B = 0$. Dafür genügt es zu zeigen, dass $(\det B)(\alpha_k) = 0$ für alle $k = 1, \dots, n$. Wegen (1) gelten für B_{ij} und α_j:

(2) $\sum_{j=1}^{n} B_{ij}(\alpha_j) = 0$ für alle $1 \le i \le n$.

Setze $\tilde{B} := adj B$. Aus (2) folgt für alle k und i: $\tilde{B}_{ki}(\sum_{j=1}^{n} B_{ij}\alpha_j) = 0 = \sum_{j=1}^{n} \tilde{B}_{ki}B_{ij}\alpha_j$.

Wir summieren über i und bekommen:

$$0 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \tilde{B}_{ki}B_{ij}\alpha_j = \sum_{j=1}^{n} \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n} \tilde{B}_{ki}B_{ij}\right)}_{kj\text{-te Koeff. von } \tilde{B}B} (\alpha_j).$$

Nun ist (wegen Korollar 16.7) $\tilde{B}B = (\det B)I$, also $\sum_{i=1}^{n} \tilde{B}_{ki}B_{ij} = \delta_{kj} \det B$.

Also $0 = \sum_{j=1}^{n} \delta_{kj}(\det B)(\alpha_j) = (\det B)(\alpha_k)$. □

Nun beantworten wir die **Wichtige Frage** der Einleitung. Sei $F_0 \subset F_1$ eine Körpererweiterung; wir bemerken, dass $M_{n\times n}(F_0) \subseteq M_{n\times n}(F_1)$.

Satz 20.1.
Sei $F_0 \subseteq F_1$ eine Körpererweiterung. Sei $A \in M_{n\times n}(F_0)$, und seien

$$\text{Char. Pol.}_{F_0}(A) \text{ und Min. Pol.}_{F_0}(A)$$

beziehungsweise

$$\text{Char. Pol.}_{F_1}(A) \text{ und Min. Pol.}_{F_1}(A)$$

die charakteristischen bzw. minimalen Polynome von A jeweils als Element aus $M_{n\times n}(F_0)$ und $M_{n\times n}(F_1)$. Dann gelten

(1) Char. Pol.$_{F_0}(A)$ = Char. Pol.$_{F_1}(A)$ und

(2) Min. Pol.$_{F_0}(A)$ = Min. Pol.$_{F_1}(A)$.

Beweis:

(1) Ist offensichtlich, weil $\det(B)$ nur von Koeffizienten der Matrix B abhängen.

(2) (i) Wir untersuchen zunächst die folgende Frage: Wie entscheiden wir, für den gegebenen Körper K und der natürlichen Zahl $k \in \mathbb{N}$, ob es ein Polynom $p \in K[x]$ gibt mit $\deg(p) = k$ und $p(A) = 0$?

Dafür lösen wir ein Matrixgleichungssystem

$$A^k + x_{k-1}A^{k-1} + \cdots + x_0 I = 0. \tag{$*$}$$

$(*)$ ist also ein lineares Gleichungssystem mit n^2 Gleichungen in der Variablen $x_0, \ldots, x_{k-1}$. Jede Lösung $a_0, \ldots, a_{k-1} \in K$ gibt uns ein Polynom $p(x) := x^k + \sum_{j=0}^{k-1} a_j x^j$ mit $p(x) \in \mathcal{A}(A)$.

Wenn wir $(*)$ für die kleinste natürliche Zahl k, für die es eine Lösung gibt, gelöst haben, dann ist die Lösung $a_0, \ldots, a_{k-1}$ eindeutig, weil sie uns die eindeutig definierten Koeffizienten $1, a_{k-1}, \ldots, a_0$ von Min. Pol.$_K(A)$ von A über K liefert.

Wir folgern: Sei k minimal, so dass $(*)$ eine Lösung in K hat, dann liefert diese Lösung das Min. Pol.$_K(A)$.

(ii) Nun untersuchen wir Lösungen für das LGS:
Sei $B \in M_{m\times n}(F_0)$, $F_0 \subseteq F_1$ Körpererweiterung, $Y \in F_0^{m\times 1}$. Betrachte

$$BX = Y \tag{S}$$

Wir behaupten: wenn (S) eine Lösung in $F_1^{n\times 1}$ hat, dann hat (S) auch eine Lösung in $F_0^{n\times 1}$ (und umgekehrt natürlich!): Dies gilt, weil alleine aus der r.Z.S.F. $(B \mid Y)$ können wir entscheiden, ob es Lösungen gibt (siehe LA I Script 6; Satz 6.3 **Zweck**). (bzgl. F_1) Nun ist aber die r.Z.S.F. eindeutig (insbesondere unabhängig vom betrachtetem Grundkörper), also ist r.Z.S.F.$(B \mid Y)$ bzgl. F_1 gleich r.Z.S.F.$(B \mid Y)$ bzgl. F_0.

Aus (i) und (ii) sehen wir, dass $(*)$ eine Lösung $(a_0, \dots, a_{k-1}) \in F_1^k$ genau dann hat, wenn es eine Lösung in F_0^k hat. Die Eindeutigkeit des Min. Pol.$_{F_1}$ liefert außerdem, dass die Lösung in F_0^k auch $(a_0, \dots, a_{k-1})$ sein muss! □

§ 11 Trigonalisierbarkeit, invariante Unterräume

Sei V ein endlich dim. K-Vektorraum.

Definition 20.2.
$T \in \mathcal{L}(V,V)$ ist trigonalisierbar, falls es eine Basis $\mathcal{B}$ für V gibt, so dass $[T]_{\mathcal{B}}$ eine *obere Dreiecksmatrix* (i.e. $a_{ij=0}$ für $i > j$) ist.

Satz 20.3.
Sei V n-dim., $T \in \mathcal{L}(V,V)$. Es gilt: T ist trigonalisierbar $\Leftrightarrow$ Char. Pol. (T) zerfällt in Linearfaktoren über K (i.e. Char. Pol. $(T) = (x-c_1)^{n_1} \cdots (x-c_k)^{n_k}$ mit $c_i \in K$).

Beweis

"$\Rightarrow$" Klar, weil $[T]_{\mathcal{B}} = A$ eine obere Dreiecksmatrix ist, also $\det(xI - A)$ ist das Produkt $\prod_{i=1}^{n}(x - a_{ii})$.

"$\Leftarrow$" Wir werden per Induktion eine Basis $\mathcal{B} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ aufbauen, in der $[T]_{\mathcal{B}}$ eine obere Dreiecksmatrix ist. Da T wenigstens einen Eigenwert hat, hat T auch einen Eigenvektor zum Eigenwert $c_1 \in K$. Sei $\alpha \neq 0$ solch ein Eigenvektor und ergänze zu einer Basis $(\alpha, \beta_2, \dots, \beta_n)$ für V (geordnet, so dass α der erste Vektor davon ist).
Betrachte diesbezüglich die Matrixdarstellung von T:

$$\left(\begin{array}{c|ccc} c_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ -- & -- & -- & -- \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \\ 0 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{array}\right) \quad \left.\begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array}\right\} \Gamma \in M_{(n-1)\times(n-1)}(K)$$

Sei $G \in \mathcal{L}(W,W)$, wobei $W := \mathit{span}(\beta_2, \dots, \beta_n)$ definiert durch $Gw := \Gamma w$, für alle $w \in W$. Wir sehen also Char. Pol. $(T) = (x - c_1)$ Char. Pol. (G). Da Char. Pol. (T) ein Produkt von linearen Faktoren ist, so ist es auch Char. Pol. (G). Die Induktionsannahme liefert eine Basis $(\alpha_2, \dots, \alpha_n)$, in der G eine obere Dreiecksmatrix-Darstellung hat:

$$\left(\begin{array}{c|ccc} c_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ -- & -- & -- & -- \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & \ddots \end{array}\right)$$

Setze $\alpha_1 := \alpha$ und setze $\mathcal{B} := (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ □

21 Script zur Vorlesung: Lineare Algebra II

Prof. Dr. Salma Kuhlmann

In den Skripten 21 und 22 werden wir T-invariante Unterräume sowie die Matrixdarstellung von T diesbezüglich studieren. Wir schließen Skript 21 mit einer Erinnerung an Skript 5.

§ 12 Invariante Unterräume

Sei V ein n-dimensionaler K-Vektorraum.

Definition 21.1.
Sei $W \subseteq V$ ein Unterraum und $T \in \mathcal{L}(V,V)$. Dann ist W T-*invariant*, falls $T(W) \subseteq W$.

Beispiel 21.2.

(0) $\{0\}$ und V sind T-invariant für alle T.

(1) Sei D der Ableitungsoperator auf $V = K[x]$ und $W := K[x]_{\leq d} = \{f \ ; \ f = 0 \text{ oder } \deg f \leq d\}$. Dann ist W D-invariant.

(2) Sei $U \in \mathcal{L}(V,V)$ mit $TU = UT$, setze

  (a) $W := \text{Im } (U)$

  (b) $N := \ker(U)$.

  Dann sind W und N T-invariant.

  Beweis

  (a) Sei $\alpha \in \text{Im } (U)$, $\alpha = U(\beta)$; $T(\alpha) = T(U(\beta)) = U(T(\beta)) \in \text{Im } (U)$

  (b) $\alpha \in N; U(T(\alpha)) = T(U(\alpha)) = T(0) = 0 \Rightarrow T(\alpha) \in N$

(3) $W \subseteq V$ ist T-invariant $\Rightarrow$ W ist $g(T)$-invariant für alle $g \in K[x]$ (ÜB).

(4) Für alle $g \in K[x]$ gilt $g(T)T = Tg(T)$ (ÜA). Insbesondere gilt dies für $g(T) := cI - T$. Wegen (2) ist also $\ker(T - cI)$ T-invariant; i.e. der Eigenraum W_c zum Eigenwert c ist T-invariant.

(5) $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$

  Setze $T := T_A$. Wir behaupten, dass nur $\{0\}$ und $V = \mathbb{R}^2$ T-invariant sind:
  Sei $W \neq V, W \neq \{0\}$ T-invariant. Daraus folgt aber, dass $\dim W = 1$. Sei $\alpha \neq 0, \alpha \in W; \{\alpha\}$ ist eine Basis und damit ein Eigenvektor (weil $T(\alpha) \in T$, also $T(\alpha) = c\alpha$ für ein geeignetes $c \in \mathbb{R}$). A hat aber keine reellen Eigenwerte.

- **Der Operator T_W:**

Sei W T-invariant, setze $T_w := T\restriction_W$. Dann ist $T_W \in \mathcal{L}(W,W)$ (ÜA).

Matrix-Darstellung von T_W:
Sei $W \subseteq V$ ein T-invarianter Unterraum mit $\dim W = r$.
Sei $\mathcal{B}' = (\alpha_1, \dots, \alpha_r)$ eine Basis für W. Ergänze $\mathcal{B}'$ zu einer Basis $\mathcal{B} = (\alpha_1, \dots, \alpha_r, \alpha_{r+1}, \dots, \alpha_n)$ für V.
Betrachte $A := [T]_{\mathcal{B}}$. Wir haben die Gleichungen

$$T\alpha_j = \sum_{i=1}^{n} A_{ij}\alpha_i$$

W ist T-invariant $\Rightarrow T\alpha_j \in W$ für $j \le r$. Also $T(\alpha_j) = \sum_{i=1}^{r} A_{ij}\alpha_i$ für $j \le r$, das heißt $A_{ij} = 0$ für $j \le r$ und $i > r$. Also sieht A wie folgt aus:

$$A = \begin{pmatrix} B & C \\ 0 & D \end{pmatrix}$$

wobei B $r \times r, C$ $r \times (n-r)$ und D $(n-r) \times (n-r)$ sind. Es ist darüber hinaus klar, dass $B = [T_W]_{\mathcal{B}'}$.

Lemma 21.3.
Sei $T \in \mathcal{L}(V,V)$ und $W \subseteq V$ T-invariant. Es gelten:

(i) Char. Pol. (T_W) teilt Char. Pol. (T).

(ii) Min. Pol. (T_W) teilt Min. Pol. (T).

Beweis

(i) Ist klar, weil

$$A = [T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} [T_W]_{\mathcal{B}'} & C \\ 0 & D \end{pmatrix}$$

und somit ist $\det(xI - A) = \det(xI - B)\det(xI - D)$, wobei $B = [T_W]_{\mathcal{B}'}$.

(ii) Beachte, dass

$$A^k = \begin{pmatrix} B^k & C_k \\ 0 & D^k \end{pmatrix}$$

wobei gilt: C_k ist $r \times (n-r)$. Also annihiliert jedes Polynom, das A annihiliert, damit auch B. Also Min. Pol. (B) teilt Min. Pol. (A). □

Wir werden in der nächsten Vorlesung die Matrix D genauer untersuchen.

Erinnerung (Quotientenraum und direkte Summen aus Skript 5):

(1) Sei $W \subseteq V$ ein Unterraum. $V/W = \{\alpha + W \mid \alpha \in V\}$ mit $c(\alpha + W) = c\alpha + W$ für ein $c \in K$ und $(c\alpha + W) + (\beta + W) = (c\alpha + \beta + W)$ für $\alpha, \beta \in V$.
Bezeichnung: $\alpha + W = \overline{\alpha}$.

(2) **Kanonischer Homomorphismus**
$\pi: V \twoheadrightarrow V/W$
$\pi(\alpha) := \alpha + W$ ist surjektiv mit $\ker \pi = W$.

(3) **Isomorphiesatz**
Sei $\varphi: V \to U$ ein Homomorphismus von K-Vektorräumen. Es gilt: $V/\ker\varphi \simeq \text{Im } \varphi$.

(4) Seien $W_1, W_2 \subseteq V$ Unterräume. Man schreibt $V = W_1 \oplus W_2$ (direkte Summe), falls $V = W_1 + W_2$ und $W_1 \cap W_2 = \{0\}$. Das heißt für alle $\alpha \in V$ existiert genau ein $(w_1, w_2) \in W_1 \times W_2$, so dass $\alpha = w_1 + w_2$.
Projektions-Homomorphismus
$\pi: W_1 \oplus W_2 \twoheadrightarrow W_2; \pi(w_1 + w_2) := w_2$ ist surjektiv mit $\ker \pi = W_1$. Also gilt

$$\frac{W_1 \oplus W_2}{W_1} \simeq W_2.$$

(5) Sei $T \in \mathcal{L}(V, V)$ und $W \subseteq V$ T-invariant. Die Abbildung

$$\overline{T}: V/W \to V/W$$

wird so definiert:

$$\overline{T}(\overline{\alpha}) = \overline{T}(\alpha + W) := T(\alpha) + W = \overline{T(\alpha)}.$$

Sie ist wohldefiniert, i.e. $\alpha_1 + W = \alpha_2 + W \Rightarrow T(\alpha_1) + W = T(\alpha_2) + W$, weil $\alpha_1 - \alpha_2 \in W \Rightarrow T(\alpha_1 - \alpha_2) \in W \Rightarrow T(\alpha_1) - T(\alpha_2) \in W \Rightarrow T(\alpha_1) + W = T(\alpha_2) + W$. Sie ist auch linear, i.e. $\overline{T} \in \mathcal{L}(V/W, V/W)$.

22 Script zur Vorlesung: Lineare Algebra II

Prof. Dr. Salma Kuhlmann

Wir setzen die Untersuchung der Matrixdarstellung begonnen in Abschnitt 12, Skript 21 fort.

Sei V ein endlich dimensionaler K-Vektorraum.

Lemma 22.1.

(1) Sei $W \subseteq V$ ein Unterraum; $\mathcal{B}' \subseteq W$ eine Basis für W, $\mathcal{B}' \cup \mathcal{B}''$ eine ergänzte Basis für V. Dann ist $\overline{\mathcal{B}''}$ eine Basis für V/W.

(2) Umgekert sei $(\overline{\alpha_{r+q}}, \ldots, \overline{\alpha_n})$ eine Basis für V/W, dann ist $\mathcal{B}' \cup (\alpha_{r+1}, \ldots, \alpha_n)$ eine Basis für V.

Beweis: Siehe ÜB.

Satz 22.2.
Sei $W \subseteq V, T \in \mathcal{L}(V,V)$ und W T-invariant. Sei $\mathcal{B}'$ eine Basis für W, ergänze zu einer Basis $\mathcal{B} = \mathcal{B}' \mathbin{\dot\cup} \mathcal{B}''$ von V. Es gilt:

$$A := [T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} B & C \\ 0 & D \end{pmatrix},$$

wobei $B = [T_W]_{\mathcal{B}'}$, $D = [\overline{T}]_{\overline{\mathcal{B}''}}$, und $\overline{\mathcal{B}''} = \{\overline{\alpha}\ ;\ \alpha \in \mathcal{B}''\}$.

Beweis:
Setze $r := \dim W$; sei $\mathcal{B}' := (\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$ und $\mathcal{B} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_r, \alpha_{r+1}, \ldots, \alpha_n)$ die geordneten Basen. Die Aussage über die $r \times r$-Matrix B ist bereits in Skript 21 bewiesen worden.
Wir analysieren die $(n-r) \times (n-r)$-Matrix D. Die Matrix $A = [T]_{\mathcal{B}}$ ist durch die folgenden Gleichungen definiert:

$$T(\alpha_i) = \sum_{j=1}^{n} A_{ji}\alpha_j \text{ für } 1 \leq i \leq n \qquad (*)$$

$$A = \left(\begin{array}{c|c|c|c} B & [T(\alpha_{r+1})]_{\mathcal{B}} & \cdots & [T(\alpha_n)]_{\mathcal{B}} \\ r \times r & & & \\ --- & & & \\ & & & \end{array}\right)$$

$$\mathcal{B} = \{\underbrace{\alpha_1, \ldots, \alpha_r}_{|\mathcal{B}'|=r}, \underbrace{\alpha_{r+1}, \ldots, \alpha_n}_{|\mathcal{B}''|=(n-r)}\}$$

$$\overline{\mathcal{B}''} = \{\underbrace{\overline{\alpha_{r+1}}, \ldots, \overline{\alpha_n}}_{|\mathcal{B}''|=(n-r)}\}$$

Schreibe

$$A = \left(\begin{array}{c|c|c|c} B & A_{1(r+1)} & & A_{1n} \\ & \vdots & & \vdots \\ --- & A_{r(r+1)} & & A_{rn} \\ & A_{(r+1)(r+1)} & \cdots & A_{(r+1)n} \\ & \vdots & & \vdots \\ & A_{n(r+1)} & & A_{nn} \end{array}\right)$$

oder für $1 \le i \le n$

$$T(\alpha_i) = \underbrace{\sum_{j=1}^{r} A_{ji}\alpha_j}_{\in W} + \sum_{j=r+1}^{n} A_{ji}\alpha_j \qquad (**)$$

und damit ist:

$\overline{T(\alpha_i)} = \sum_{j=r+1}^{n} A_{ji}\overline{\alpha_j} = \overline{T}(\overline{\alpha_i})$ für $r+1 \le i \le n$. □

Aus Satz 22.2 (und Aufgabe 9.2 d)) folgt nun:

Korollar 22.3.
Char. Pol. $T =$ (Char. Pol. T_W)(Char. Pol. $\overline{T}$).

Für eine analoge Aussage über Min. Pol. T siehe ÜB.

Bemerkung 22.4.
Die Aussage im Korollar 22.5 haben wir schon in Skript 20, Satz 20.3 bewiesen. Man kann einen zweiten Beweis mithilfe von T_W und $\overline{T}$ führen.

Korollar 22.5.
T ist trigonalisierbar genau dann, wenn Char. Pol. (T) in ein Produkt von linearen Faktoren über K zerfällt.

Beweis: Siehe ÜB.

Nun betrachten wir die obige Aussage für Min. Pol. (T).

Korollar 22.6.
Sei V endl. dim., $T \in \mathcal{L}(V,V)$. T is trigonalisierbar genau dann, wenn Min. Pol. (T) in ein Produkt von linearen Faktoren über K zerfällt.

Beweis:
Wir zeigen: Char. Pol. (T) zerfällt in ein Produkt von linearen Faktoren über K genau dann, wenn Min. Pol. (T) in ein Produkt von linearen Faktoren über K zerfällt..

"$\Rightarrow$" Min. Pol. (T) teilt Char. Pol. (T). Da lineare Faktoren irreduzibel sind, folgt aus der Eindeutigkeit der Primfaktorisierung in $K[x]$, dass auch Min. Pol. (T) ein Produkt von linearen Faktoren ist.

"$\Leftarrow$" Sei Min. Pol. $(T) = \prod_{i=1}^{k}(x - c_i)^{\nu_i}$.

Min. Pol. (T) teilt Char. Pol. (T). Also Char. Pol. (T) = Min. Pol. $(T)q(x)$ mit $q(x) \in K[x]$. Wenn $\deg(q(x)) = 0$ dann ist $q(x) = 1$. Sei also $\deg(q(x)) > 0$ und sei $C \supseteq K$ eine Körpererweiterung so dass $q(x)$ über C als Produkt zerfällt:

$$q(x) = \prod_{j=1}^{\ell}(x - d_j).$$

(Die Existenz vom *Zerfällungskörper* C werden wir in der Algebra-Vorlesung B3 im nächsten Semester beweisen.)

Wegen Satz 19.6 und Satz 20.1 haben Min. Pol. (T) und Char. Pol. (T) dieselben Nullstellen in C. Wir behaupten nun, dass d_j bereits in K liegt und $d_j = c_i$ für ein geeignetes i. Dies gilt, weil d_j sonst eine Nullstelle von Char. Pol. (T), also auch von Min. Pol. (T) mit $d_j \in C \setminus K$ (i.e. $d_j \in C$ aber $d_j \notin K$) wäre.

Dies ist aber unmöglich, da Min. Pol. (T) bereits alle seine Nullstellen in K hat. $\square$

23 Script zur Vorlesung: Lineare Algebra II

Prof. Dr. Salma Kuhlmann

In Skript 23 und 24 werden wir eine allgemeine Normalform (die Jordan Normalform) kennenlernen und damit Kapitel III beenden. In Abschnitt 13 werden wir zunächst die Zerlegung von V als direkte Summe bzgl. T etablieren. In Abschnitt 14 werden wir Jordanketten und Zellen einführen.

§ 13 Direkte Summen

Lemma 23.1.
Sei V ein K-Vektorraum, $W_1, \dots, W_k$ Unterräume. Folgende Aussagen sind äquivalent:

(*i*) $W_1, \dots, W_k$ sind unabhängig, i.e.: Sei $\alpha_i \in W_i$ für $1 \leq i \leq k$ so dass $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 0$. Dann ist $\alpha_i = 0$ für alle $1 \leq i \leq k$.

(*ii*) $W_j \cap (W_1 + \dots + W_{j-1}) = \{0\}$ für $2 \leq j \leq k$

(*iii*) Ist $\mathcal{B}_i$ eine Basis für W_i, so ist $\mathcal{B} = \bigcup_{i=1}^{k} \mathcal{B}_i$ eine Basis für $W := W_1 + \dots + W_k$.

Siehe ÜB.

Notation und Terminologie:
Wir schreiben $V = W_1 + \dots + W_k$, wenn V nur die Summe der W_i's ist und wir schreiben $V = W_1 \oplus \dots \oplus W_k$, falls $V = W_1 + \dots + W_k$ und eine der äquivalenten Bedingungen (i), (ii) und (iii) von Lemma 23.1 gilt. In dem Fall heißt V die *direkte Summe* der W_i's.

Satz 23.2. (Primzerlegung von V bzgl. T)
Sei V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum, und $T \in \mathcal{L}(V, V)$. Setze Min. Pol. $(T) =: p$. Sei $p = p_1^{r_1} \dots p_k^{r_k}$ die Primfaktorisierung in $K[x]$ von p; wobei p_i verschiedene normierte irreduzible Polynome in $K[x]$ und $r_i \in \mathbb{N}$ sind. Setze $W_i := \ker p_i(T)^{r_i}$ für $1 \leq i \leq k$. Dann ist W_i T-invariant für alle i (s. Skript 21), und darüberhinaus gelten:

(*i*) $V = W_1 \oplus \dots \oplus W_k$ und

(*ii*) Min. Pol. $(T_{W_i}) = p_i^{r_i}$ für $1 \leq i \leq k$.

Hierunter in 23.3 beweisen wir Satz 23.2 für $k = 2$. Der allgemeinere Fall folgt per Induktion nach k.

Proposition 23.3.
Sei $\dim V < \infty, T \in \mathcal{L}(V,V)$, Min. Pol. $(T) = m = m_1 m_2$ mit $ggT(m_1, m_2) = 1$. Setze $V_i := \ker m_i(T)$ für $i = 1,2$. Es gilt $V = V_1 \oplus V_2$ und Min. Pol. $(T_{V_i}) = m_i$ für $i = 1,2$.

Beweis:
Da m_1, m_2 relativprim sind, existiert $q_1, q_2 \in K[x]$ mit $1 = m_1 q_1 + m_2 q_2$.
Also $I = m_1(T) q_1(T) + m_2(T) q_2(T)$ $(*)$

Behauptung 1:
$V_1 = \text{Im } m_2(T)$ und $V_2 = \text{Im } m_1(T)$

Beweis der Behauptung 1:
$0 = m(T) = m_1(T) m_2(T)$, weil $m =$ Min. Pol. (T). Also $\text{Im } m_2(T) \subseteq \ker m_1(T)$.

Umgekehrt sei $v \in \ker m_1(T)$. Mit $(*)$ gilt

$$v = \underbrace{q_1(T) m_1(T)(v)}_{=0} + \underbrace{m_2(T) q_2(T)(v)}_{\in \text{Im } m_2(T)}$$ □

Behauptung 2:
$V = V_1 \oplus V_2$

Beweis der Behauptung 2:

1. Summe: $v \in V$. Mit $(*)$ gilt:
   $$v = \underbrace{m_1(T) q_1(T) v}_{\in \text{Im } m_1(T)} + \underbrace{m_2(T) q_2(T) v}_{\in \text{Im } m_2(T)}$$
2. Direkt: Sei $v \in V_1 \cap V_2$. Mit $(*)$ gilt:
   $$v = \underbrace{q_1(T) m_1(T)(v)}_{=0 \text{ weil } v \in V_1} + \underbrace{q_2(T) m_2(T)(v)}_{=0 \text{ weil } v \in V_2}$$

□

Sei nun $\widetilde{m}_i =$ Min. Pol. (T_{V_i}) für $i = 1,2$. Da $V_i = \ker m_i(T)$, ist es klar, dass $m_i(T_{V_i}) = 0$ für $i = 1,2$.

Also $\widetilde{m}_1 \mid m_1$ $(**)$
und $\widetilde{m}_2 \mid m_2$.

Behauptung 3:
$\widetilde{m}_1 \widetilde{m}_2$ annihiliert T.

Beweis der Behauptung 3:
Berechne für $v_2 \in V_2$ und $v_1 \in V_1$

$\widetilde{m}_1(T) \widetilde{m}_2(T)(v_2 + v_1) = \widetilde{m}_1(T)[\widetilde{m}_2(T)(v_2) + \widetilde{m}_2(T)(v_1)]$
$= \widetilde{m}_1(T)[0 + \widetilde{m}_2(T)(v_1)] = 0$, da $\widetilde{m}_2(T)(v_1) \in V_1$
(weil V_1 $\widetilde{m}_2(T)$-invariant ist, siehe Skript 21; Beispiel 21.2 (2)). □

• Da $\widetilde{m}_2 \widetilde{m}_1$ T annihiliert folgt
$m_1 m_2 = m \mid \widetilde{m}_1 \widetilde{m}_2$ $(***)$

Da m_1, m_2 normiert sind, folgt nun aus $(**)$ und $(***)$, dass $\widetilde{m}_i = m_i$ für $i = 1,2$. □

Sonderfall vom Satz 23.2
Sei p_i linear und $r_i = 1$ für alle i. Dann ist $p = (x - c_1)\cdots(x - c_k)$ mit $c_i \neq c_j$ für $1 \leq i \neq j \leq k$.

In diesem Fall ist $W_i = \ker(T - c_i I)$ = der Eigenraum zum Eigenwert c_i. Der Satz ergibt: $V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_k$. Also hat V eine Basis aus Eigenvektoren (Lemma 23.1) und damit ist T diagonalisierbar. Wir haben damit die Umkehrung (von Proposition 19.7) gezeigt. Wir haben nämlich bewiesen:

Satz 23.4. (Diag. Kriterium für Min. Pol.)
T is diagonalisierbar $\Leftrightarrow$ Min. Pol. (T) zerfällt in verschiedene lineare Faktoren über $K[x]$.

§ 14 Jordanketten

Sei V ein endlich dimensionaler K-Vektorraum, $T \in \mathcal{L}(V, V)$.

Definition 23.5.
Sei c ein Eigenwert und $0 \neq v_1 \in V$ ein Eigenvektor zum Eigenwert c. Seien $\ell \in \mathbb{N}$ und $v_2, \ldots, v_\ell \in V$. Das Vektortupel $(v_1, \ldots, v_r)$ ist eine *Jordankette der Länge ℓ zum Eigenwert c*, falls

$$\begin{array}{rcll} (T - cI)(v_i) & = & v_{i-1} & i = 2, \ldots, \ell \\ (T - cI)(v_i) & = & 0 & \text{für } i = 1. \end{array}$$

Lemma 23.6.
Sei $\mathcal{B}' := (v_1, \ldots, v_r)$ eine Jordankette.
Dann ist $\{v_1, \ldots, v_r\}$ linear unabhängig und $W = span\{v_1, \ldots, v_r\}$ T-invariant. Die Matrixdarstellung von T_W bzgl. $\mathcal{B}'$ ist die *Jordanzelle $J_\ell(c)$ der Dimension ℓ zum Eigenwert c*, das heißt:

$$[T_W]_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} c & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & c \end{pmatrix} \leftarrow J_\ell(c) := \begin{array}{c} \text{Jordanzelle der Dimension} \\ \ell \text{ zum Eigenwert } c. \end{array}$$

(Siehe ÜB).

24 Script zur Vorlesung: Lineare Algebra II

Prof. Dr. Salma Kuhlmann

In diesem Skript beweisen wir Satz 24.2 und untersuchen seine Folgerungen. Damit beenden wir Kapitel III.

Erinnerung 24.0:
Sei V ein K-Vektorraum und seien $W \subseteq V, W' \subseteq V$ Unterräume. W' ist *Komplement* von W in V, wenn $V = W \oplus W'$.

Bemerkung 24.1.

1. Sei $W \subseteq V$ ein Unterraum und $v_1^1, \dots, v_s^1 \in V$ linear unabhängig, so dass $span\{v_1^1, \dots, v_s^1\} \cap W = \{0\}$ sind. Dann kann man $\{v_1^1, \dots, v_s^1\}$ zu einer Basis von einem Komplement von W in V ergänzen.

2. Komplemente existieren und sind im Allgemeinen nicht eindeutig.

Beweis: ÜA

Satz 24.2. (Jordan Normalform).
Sei V ein endlich dimensionaler K-Vektorraum und $T \in \mathcal{L}(V, V)$. Sei Min. Pol. $(T) = (x - c)^r$ mit $c \in K$. Dann hat V eine Basis aus Jordanketten zum Eigenwert c (eine Jordanbasis). Die längsten Ketten haben die Länge r, die Anzahl der Ketten in jeder Länge ist eindeutig bestimmt.

Beweis: Beachte, dass

$$\ker(T - cI) \subseteq \ldots \subseteq \ker(T - cI)^r = V.$$

Behauptung:
Seien $j \geq 2$ und $v^1, \dots, v^s \in \ker(T - cI)^j$ linear unabhängig und $span\{v^1, \dots, v^s\} \cap \ker(T - cI)^{j-1} = \{0\}$.
Dann gelten:

1. $w^1 := (T - cI)v^1, \dots, w^s := (T - cI)v^s \in \ker(T - cI)^{j-1}$ linear unabhängig und

2. $span\{w^1, \dots, w^s\} \cap \ker(T - cI)^{j-2} = \{0\}$.

Beweis der Behauptung:

1. $0 = (T - cI)^j v^i = (T - cI)^{j-1} \underbrace{(T - cI)v^i}_{w^i}$. Also $w^i \in \ker(T - cI)^{j-1}$.

   Sei nun $\sum_{i=1}^{s} c_i w^i = 0$ mit $c_i \neq 0$ für ein i, so $\sum_{i=1}^{s} c_i (T - cI)v^i = 0$.

   Also $(T - cI) \sum_{i=1}^{s} c_i v^i = 0$. Also $\sum_{i=1}^{s} c_i v^i \in \ker(T - cI)^{j-1}$, weil $(T - cI)^{j-1}(\sum c_i v^i) = (T - cI)^{j-2} \underbrace{(T - cI)(\sum c_i v^i)}_{0} = 0$.

   Also ist $\sum_{i=1}^{s} c_i v^i \in span\{v^1, \dots, v^s\} \cap \ker(T - cI)^{j-1}$.

Also ist $\sum_{i=1}^{s} c_i v^i = 0$ mit $c_i \neq 0$ für ein i. Widerspruch, da $\{v_1, \dots, v_s\}$ linear unabhängig sind.

2. Betrachte nun $\sum c_i w^i$, so dass $(T - cI)^{j-2}(\sum c_i w^i) = 0$.
   Dann ist $(T - cI)^{j-1}(\sum c_i v^i) = 0$, also $\sum c_i v^i = 0$ und damit $(T - cI)(\sum c_i v^i) = 0$.
   Also $\sum c_i (T - cI) v^i = 0 = \sum c_i w^i$. □Beh.

Wir bauen nun eine Basis aus Jordanketten.

- $n_r := \dim\ker(T - cI)^r - \dim\ker(T - cI)^{r-1}$ und schreibe $V = V_r \oplus \ker(T - cI)^{r-1}$.
  Sei $\{v_r^1, \dots, v_r^{n_r}\}$ eine Basis für V_r.
  Setze $v_{r-1}^1 := (T - cI)v_r^1, \dots, v_{r-1}^{n_r} := (T - cI)v_r^{n_r} \in \ker(T - cI)^{r-1}$ und ergänze zu einer Basis von einem Komplement V_{r-1} von $\ker(T - cI)^{r-2}$ in $\ker(T - cI)^{r-1}$:
  $\{v_{r-1}^1, \dots, v_{r-1}^{n_r}, v_{r-1}^{n_r+1}, \dots, v_{r-1}^{n_r+n_{r-1}}\}$.
- Also $n_{r-1} = \dim\ker(T - cI)^{r-1} - \dim\ker(T - cI)^{r-2} - n_r$ und
  $\ker(T - cI)^{r-1} = V_{r-1} \oplus \ker(T - cI)^{r-2}$
- Wir verfahren so weiter für jedes $i = r - 2, \dots, 1$. Dabei berechnen wir immer:
  $$n_i = \dim\ker(T - cI)^i - \dim\ker(T - cI)^{i-1} - n_r - \ldots - n_{i+1}.$$
- Im letzten Schritt bekommen wir
  $v_1^1 = (T - cI)v_2^1, \dots, v_1^{n_r+\dots+n_2} = (T - cI)v_2^{n_r+\dots+n_2}$, welches wir zu einer Basis von $\ker(T - cI)$ ergänzen:
  $v_1^1, \dots, v_1^{n_r+\dots+n_2}, v_1^{n_r+\dots+n_2+1}, \dots, v_1^{n_r+\dots+n_2+n_1}$.
  Insbesondere ist
  $$n_1 = \dim\ker(T - cI)^1 - \dim\ker(T - cI)^0 - n_r - \ldots - n_2 = \dim\ker(T - cI) - \sum_{i=2}^{r} n_i.$$
- Dies ist die Gestalt der gesamten Jordanbasis für V, die wir erhalten (wobei jede "Spalte" hierunter eine Jordankette ist):

$$\begin{array}{llll}
v_r^1, \dots, v_r^{n_r}, & & & \\
v_{r-1}^1, \dots, v_{r-1}^{n_r}, & v_{r-1}^{n_r+1}, \dots, v_{r-1}^{n_r+n_{r-1}}, & & \\
\vdots & \vdots & & \\
\underbrace{v_1^1, \dots, v_1^{n_r},}_{n_r} & \underbrace{v_1^{n_r+1}, \dots, v_1^{n_r+n_{r-1}}}_{n_{r-1}}, \dots, & & \underbrace{v_1^{n_r+\dots+n_2+1}, \dots, v_1^{n_r+\dots+n_2+n_1}}_{n_1} \\
\text{Jordanketten} & \text{Jordanketten} & & \text{Jordanketten} \\
\text{der Länge } r & \text{der Länge } r-1 & , \dots, & \text{der Länge } 1
\end{array}$$
□

Bemerkung 24.3.
Die Matrixdarstellung in der Joradanbasis, die wir in Satz 24.2 erhalten haben, ist

$$A_c := \begin{pmatrix}
J_r(c) & & & & & & \\
& \ddots & & & 0 & & \\
& & J_r(c) & & & & \\
& & & \ddots & & & \\
& 0 & & & J_1(c) & & \\
& & & & & \ddots & \\
& & & & & & J_1(c)
\end{pmatrix}$$ wobei die Jordanzelle $J_i(c)$ n_i-mal erscheint.

Korollar 24.4.
Sei V ein endlich dimensionaler K-Vektorraum, $T \in \mathcal{L}(V,V)$. Falls Min. Pol. (T) (oder Char. Pol. (T)) über K zerfällt, dann hat V eine Basis von Jordanketten zu den verschiedenen Eigenwerten. Die Anzahl der Jordanketten in jeder Länge ist eindeutig bestimmt.

Beweis:
Sei Min. Pol. $(T) = (x - c_1)^{r_1} \cdots (x - c_k)^{r_k}$
Satz 23.2 liefert eine Zerlegung:
$V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_k$ mit W_i T-invariant und Min. Pol. $T_{W_i} = (x - c_i)^{r_i}$.
Jordan Normalform liefert Basen $\mathcal{B}_{c_i}$ von Jordanketten für T_{W_i} und jedes c_i.
Setze $\mathcal{B} = \bigcup_{i=1}^{k} \mathcal{B}_{c_i}$ (die geordnete Basis). □

Bemerkung 24.5.
Sei $V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_k, W_i$ T-invariant und $\mathcal{B}_i$ = Basis für $W_i, \mathcal{B} = \bigcup_{i=1}^{k} \mathcal{B}_{c_i}$ (als geordnete Basis). Es gilt

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} A_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_k \end{pmatrix}$$

wobei $A_i = [T_{W_i}]_{\mathcal{B}_i}$.

Beweis: Siehe ÜB.

In B3 werden wir algebraisch abgeschlossene Körper kennenlernen. Wenn K algebraisch abgeschlossen ist (z.B. $K = \mathbb{C}$), dann zerfällt jedes Polynom (vom Grad ≥ 1) über K.

Korollar 24.6.
Sei K algebraisch abgeschlossen, V ein endlich dimensionaler K-Vektorraum und $T \in \mathcal{L}(V,V)$. Es gibt eine Basis $\mathcal{B}$ von V, so dass

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} A_{c_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_{c_k} \end{pmatrix}$$

wobei $c_1, \ldots c_k$ die Eigenwerte von T sind und A_{c_i} wie in Bemerkung 24.3 beschrieben.

25 Script zur Vorlesung: Lineare Algebra II

Prof. Dr. Salma Kuhlmann

KAPITEL IV: EUKLIDISCHE UND UNITÄRE RÄUME.

In diesem Kapitel werden wir einen K-Vektorraum V (wobei $K = \mathbb{R}$, oder $\mathbb{C}$) betrachten. Wir werden zunächst in Abschnitt 15; Skripte 25 und 26 eine weitere Struktur (inneres Produktund Norm) auf V definieren und seine Eigenschaften analysieren. Wir werden dabei besondere (orthonormale) Basen für V studieren. Nachdem wir in Abschnitt 16 die Beziehung zum Dualraum V^* (Riesz-Darstellung) und zum Bidualraum V^{**} analysieren, werden wir die transponierte Konjugierte T^* von $T \in \mathcal{L}(V,V)$ einführen. In den Abschnitten 17 bis 20 werden wir dann im Bezug auf T^* besondere Operatoren $T \in \mathcal{L}(V,V)$ und deren Matrixdarstellungen betrachten. Insbesondere werden wir e.g. Hermite'sche Operatoren sowie Isometrien studieren. In den letzten 3 Abschnitten 21 bis 23 werden wir unser Studium auf normale Operatoren erweitern, und deren Spektraltheorie und Anwendungen einbringen.

§ 15 Innere Produkte

Sei stets $K = \mathbb{R}$, oder $K = \mathbb{C}$, und sei V ein endlich dimensionaler K-Vektorraum

Definition 25.0.
Ein inneres Produkt auf V ist eine Abbildung

$$\begin{array}{ccc} V \times V & \longrightarrow & K \\ (x,y) & \longmapsto & (x \mid y), \end{array}$$

so dass

(1) $(x \mid y) = \overline{(y \mid x)}$

(2) $(c_1, x_1 + c_2 x_2 \mid y) = c_1(x_1 \mid y) + c_2(x_2 \mid y)$

(3) $(x \mid x) \geq 0$ und $(x \mid x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Bemerkung 25.1.

(1') Da $(x \mid x) = \overline{(x \mid x)}$, ist $(x \mid x) \in \mathbb{R}$.

(2') Wir folgern: $(x \mid c_1 y_1 + c_2 y_2) = \overline{(c_1 y_1 + c_2 y_2 \mid x)} = \overline{c_1(y_1 \mid x) + c_2(y_2 \mid x)} = \overline{c_1}\,\overline{(y_1 \mid x)} + \overline{c_2}\,\overline{(y_2 \mid x)} = \overline{c_1}(x \mid y_1) + \overline{c_2}(x \mid y_2)$

Notation und Definition:
Wir setzen $(x \mid x) := \|x\|^2$ und nennen $\|x\| := \sqrt{(x \mid x)}$ die *Norm von* x.

Bemerkung 25.2.
Es gilt $\|cx\| = |c|\ \|x\|$.

Terminologie:
• Wenn $K = \mathbb{R}$, heißt V *euklischer Raum* und das innere Produkt $(\ \mid\ )$ heißt symmetrische [wegen (1)] bilineare [wegen (2)] positiv definite [wegen (3)] Form.

• Wenn $K = \mathbb{C}$, heißt V *hermitescher* oder *unitärer Raum* und das innere Produkt $(\ \mid\ )$ ist hermitesch symmetrische [wegen (1)], konjugiert bilineare [wegen (2) und (2')] positive definite [wegen (3)] Form.

Beispiel 25.3.
Auf $V = K^n$ is das Standard-Innere-Produkt so definiert:
$(x \mid y) = \sum\limits_{i=1}^{n} \varepsilon_i \overline{\eta_i}$, für $x = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ und $y = (\eta_1, \ldots, \eta_n) \in V$.

Definition 25.4.

(i) x, y sind *orthogonal*, falls $(x \mid y) = 0$ (äquivalent $(y \mid x) = 0$).

(ii) $W_1, W_2 \subseteq V$ sind *orthogonal*, falls $(x \mid y) = 0$ für alle $x \in W_1$ und für alle $y \in W_2$.

(iii) $S \subseteq V$ ist *orthonormal*, falls $(x \mid y) = 0$, wenn $x \neq y$ und $(x \mid y) = 1$, wenn $x = y$. Also $S = \{x_1, \ldots, x_n\}$ ist orthonormal, falls $(x_i \mid x_j) = \delta_{ij}$.

Bemerkung 25.5.

(i) S ist orthonormal $\Rightarrow S$ ist linear unabhängig.

Beweis: $\sum c_i x_i = 0 \Rightarrow 0 = (\sum c_i x_i \mid x_j) = \sum c_i (x_i \mid x_j) = c_j$, für alle j.

(ii) $\dim V = n \Rightarrow |S| \leq n$ für S orthonormal.

Definition 25.6.
orthogonal $\dim(V) := \max\{|S| \mid S \text{ orthonormal}\}$

Bemerkung 25.7.
orthogonal $\dim(V) \leq \dim(V)$

Notation: Für $S \subseteq V$, setze
$S^\perp := \{x \in V \mid (x \mid s) = 0 \text{ für alle } s \in S\}$

Bemerkung 25.8.

(i) $S^\perp$ ist ein Unterraum.

(ii) $S \subseteq (S^\perp)^\perp := S^{\perp\perp}$

(iii) *span*$(S) \subseteq S^{\perp\perp}$

Beweis:
Wir beweisen (i): $0 = (0 \mid y) \Rightarrow \{0\} \subseteq S^{\perp}$.
Für $x_1, x_2 \in S^{\perp}; c \in K : (x_1 + cx_2 \mid s) = (x_1 \mid s) + c(x_2 \mid s) = 0 + 0 = 0$.
(ii) und (iii): ÜA.

Definition 25.9.
$W \subseteq V$ ist ein Unterraum. $W^{\perp}$ ist das *orthogonale Komplement*.

Satz 25.10. (Bessel's Ungleichung)
Sei $S = \{x_1, \dots, x_n\}$ orthonormal, $x \in V$. Setze $c_i := (x \mid x_i)$. Es gelten

(i) $\sum_i |c_i|^2 \leq \|x\|^2$

(ii) $x' := x - \sum c_i x_i$ ist orthogonal zu x_j für alle $(j = 1, \dots, n)$

Beweis:
Wir berechnen: $0 \leq (x' \mid x') = (x - \sum c_i x_i \mid x - \sum c_i x_i) =$
$(x \mid x) - \sum_i c_i (x_i \mid x) - \sum_i \overline{c_i}(x \mid x_i) + \sum_{i,j} c_i \overline{c_j}(x_i \mid x_j) =$
$\|x\|^2 - \sum_i c_i \overline{c_i} - \sum_i \overline{c_i} c_i + \sum_i c_i \overline{c_i} = \|x\|^2 - \sum_i |c_i|^2$.
Damit ist (i) bewiesen.
$(x' \mid x_j) = (x \mid x_j) - \sum_i c_i (x_i \mid x_j) = c_j - c_j = 0$. Damit ist (ii) bewiesen. □

26 Script zur Vorlesung: Lineare Algebra II

Prof. Dr. Salma Kuhlmann

In Skript 26 werden wir die Eigenschaften von $(\ |\ )$ und $\|\ \|$ beweisen und das Gram-Schmidt Verfahren kennenlernen. In Abschnitt 16 werden wir mithilfe vom Riesz-Darstellungssatz die Beziehung zu V^* untersuchen.

Satz 26.1. (Ungleichung von Schwarz.)
Für alle $x, y \in V$ gilt: $|(x \mid y)| \leq \|x\|\ \|y\|$.

Beweis:
Wenn $y = 0$, dann ist die Ungleichung einfach zu prüfen. Sei also $y \neq 0$. Setze $y_1 := \frac{y}{\|y\|}$ so dass $\{y_1\}$ orthonormal ist. Bessel's Ungleichung Satz 25.10 impliziert nun $|(x \mid y)|^2 \leq \|x\|^2$.
Nun $\frac{1}{\|y\|^2}|(x \mid y)|^2 \leq \|x\|^2 \Rightarrow |(x \mid y)|^2 \leq \|x\|^2\ \|y\|^2$ □

Definition 26.2.
$\delta(x, y) := \|x - y\|$ ist die *Distanz* zwischen x und y.

Proposition 26.3.
Für alle $x, y, z \in V$ gilt:

(*i*) $\delta(x, y) = \delta(y, x)$

(*ii*) $\delta(x, y) \geq 0$; $\delta(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

(*iii*) $\delta(x, y) \leq \delta(x, z) + \delta(z, y)$ ($\triangle$ Ungleichung).

(*iv*) $\delta(x, y) = \delta(x + z, y + z)$

Beweis
Wir beweisen nur (iii), die anderen Behauptungen werden analog bewiesen.
(*iii*) (Dreiechsungleichung für Norm und Distanz.)
$\|x + y\|^2 = (x + y \mid x + y) = \|x\|^2 + (x \mid y) + (y \mid x) + \|y\|^2 = \|x\|^2 + (x \mid y) + \overline{(x \mid y)} + \|y\|^2 =$
$\|x\|^2 + 2Re(x \mid y) + \|y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2|(x \mid y)| + \|y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\|x\|\ \|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2$ □

Bemerkung 26.4.
Ein inneres Produkt definiert also auch ein Norm, d.h. die Abbildung
$x \longmapsto \|x\|$ erfüllt für alle $x, y \in V$:

(*i*) $x = 0 \Leftrightarrow \|x\| = 0$

(*ii*) $\|cx\| = |c|\ \|x\|$

(*iii*) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Definition 26.5.
Sei S eine Basis, S orthonormal, dann heißt S eine orthonormale Basis.

Satz 26.6. (Gram-Schmidt.)
Sei V ein n-dimensionaler K-Vektorraum versehen mit einem inneren Produkt. Dann hat V eine orthonormale Basis.

Beweis
Sei $\mathcal{X} = \{x_1, \dots, x_n\}$ eine Basis. Wir werden eine orthonormale Basis

$$\mathcal{J} = \{y_1, \dots, y_n\}$$

per Induktion bilden.

I. Anfang: $x_1 \neq 0$. Setze $y_1 := \frac{x_1}{\|x_1\|}$.

I.A: Seien $y_1, \dots, y_r$ schon definiert, so dass $\{y_1, \dots, y_r\}$ orthonormal und $y_j \in span\{x_1, \dots, x_j\}$ für $j = 1, \dots, r$.

I.S.: Betrachte

$$z := x_{r+1} - \sum_{i=1}^{r} c_i y_i, c_i \in K \qquad (*)$$

Berechne $(z \mid y_j) = (x_{r+1} \mid y_j) - c_j$ für $j = 1, \dots, r$. Nun setze $c_j = (x_{r+1} \mid y_j)$. Mit dieser Wahl in $(*)$ ist $(z \mid y_j) = 0$ für alle $j = 1, \dots, r$ und

$$z \in span\{x_{r+1}, y_1, \dots, y_r\} \subseteq span\{x_{r+1}, x_1, \dots, x_r\},$$

$z \neq 0$, da $x_1, \dots, x_{r+1}$ linear unabhängig sind und der Koeffizient in $(*)$ von x_{r+1} ist nicht Null.
Nun setze $y_{r+1} := \frac{z}{\|z\|}$. □

Satz 26.7.
Sei W ein Unterraum. Es gilt

(1) $V = W \oplus W^\perp$

(2) $W^{\perp\perp} = W$.

Beweis:
(1) Sei $\mathcal{X} = \{x_1, \dots, x_n\}$ eine orthonormale Basis für W und $z \in V$. Schreibe

$$W \ni x := \sum_{i=1}^{n} c_i x_i, \text{ wobei } c_i = (z \mid x_i).$$

Bessel liefert: $y := z - x$ ist orthogonal zu x_i und damit zu W, das heißt $y \in W^\perp$. Also $z = x + y$, $x \in W, y \in W^\perp$. Es gilt ferner, dass $W \cap W^\perp = \{0\}$ (weil $(x \mid x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$).

(2) $z = x + y$. Also $(z \mid x) = \|x\|^2 + (y \mid x) = \|x\|^2$. Analog $(z \mid y) = \|y\|^2$.
Wenn $z \in W^{\perp\perp}$, dann $(z \mid y) = 0 = \|y\|^2$. So $z = x \in W$. □

§ 16 Lineare Funktionale

Satz 26.8. (Riesz-Darstellung)
Sei V ein endlich dim. K-Vektorraum, versehen mit $(\ |\ )$.
Sei $f \in V^*$. Es existiert genau ein $y \in V$ mit $f(x) = (x \mid y)$ für alle $x \in V$. (†)

Beweis:
Existenz: $f = 0 \Rightarrow y = 0$.
Sei $f \neq 0; W := \ker(f) \subsetneq V; W^\perp \neq \{0\}$.

- Sei $y_0 \neq 0$; $y_0 \in W^\perp$; $OE\|y_0\| = 1$.

Setze $y := \overline{f(y_0)}y_0$. Beobachte $(y_0 \mid y) = (y_0 \mid \overline{f(y_0)}y_0) = f(y_0)(y_0 \mid y_0) = f(y_0)$.

Somit ist (†) erfüllt für y_0.

- Für $x = \lambda y_0$ berechnen wir allgemeiner: $f(x) = f(\lambda y_0) = \lambda f(y_0) = \lambda(y_0 \mid y) = (\lambda y_0 \mid y)$. Also ist (†) erfüllt.
- Für $x \in W : (x \mid y) = (x \mid \overline{f(y_0)}y_0) = f(y_0)(x \mid y_0) = 0 = f(x)$. Also ist (†) erfüllt.
- Sei nun $x \in V$, schreibe $x = x_0 + \lambda y_0$ mit $\lambda := \frac{f(x)}{f(y_0)}$ und $x_0 := x - \lambda y_0$.

Berechne $f(x_0) = f(x) - \frac{f(x)}{f(y_0)} f(y_0) = 0$, so ist $x_0 \in W$
und $f(x) = f(x_0)+f(\lambda y_0) = (x_0 \mid y)+(\lambda y_0 \mid y) = (x_0+\lambda y_0 \mid y) = (x \mid y)$. Also ist (†) immer erfüllt.

- Eindeutigkeit:

Seien $y_1, y_2 \in V$ mit $(x \mid y_1) = (x \mid y_2)$ für alle $x \in V$. Dann $(x \mid y_1 - y_2) = 0$ für alle $x \in V$, insbesondere für $x := (y_1 - y_2)$ bekommen wir $\|y_1 - y_2\|^2 = 0$, so $y_1 - y_2 = 0$. □

Satz 26.9.
Die Abbildung $\rho : V^* \longrightarrow V;\ f \longmapsto y$
(i.e. $\rho(f)$ ist eindeutig definiert durch $f(x) = (x \mid \rho(f))$ für alle $x \in V$) erfüllt:

(*i*) $\rho(f_1 + f_2) = \rho(f_1) + \rho(f_2)$

(*ii*) ρ ist surjektiv

(*iii*) ρ ist injektiv, aber Achtung

(*iv*) $\rho(cf) = \overline{c}\rho(f)$ für alle $c \in K$, i.e. ρ ist ein konjugierter Isomorphismus.

Beweis:

(i) ÜA.

(ii) $y \in V$. Betrachte $f(x) := (x \mid y)$. $f \in V^*$ und $\rho(f) = y$.

(iii) $f(x) = (x \mid 0) = 0$ für alle $x \Rightarrow f = 0$.

(iv) $z := \rho(cf); y := \rho(f)$. Zeige: $Z = \overline{c}y$, i.e. für alle $x \in V$: $(cf)(x) = (x \mid \overline{c}y)$.
Berechne: $(cf)(x) = cf(x) = c(x \mid y) = (x \mid \overline{c}y)$ □

Folgerungen 26.10.
Folgerungen I., II., III. und IV. hierunter sowie Eigenschaften (1), (2), (3), (4), (5) und (6) werden im Übungsblatt ausgearbeitet.

I. $(f_1 \mid f_2) \coloneqq (\rho(f_2) \mid \rho(f_1))$ definiert ein inneres Produkt auf V^*.

II. Sei $\mathcal{X} = \{x_1, \ldots, x_n\}$ eine Basis für V, dann existiert $\mathcal{Y} = \{y_1, \ldots, y_n\}$ eine Basis für V mit $(x_i \mid y_j) = \delta_{ij}$ für alle i, j.

III. $W^0 \subseteq W^*$ wird ersetzt durch $W^\perp \subseteq V$, i.e. $\rho(W^0) = W^\perp$.

IV. Sei $T \in \mathcal{L}(V, V)$. Definiere T^* durch $(Tx \mid y) \coloneqq (x \mid T^*y)$ für alle $x \in V$ (d.h. $T^*(y) = z$, genau dann, wenn für alle $x \in V : (x \mid z) = (Tx \mid y)$).

Es gilt $T^* \in \mathcal{L}(V, V)$. T^* ist die transponierte (adjungierte) Konjugierte.
Eigenschaft der tranponierten Konjugierten

(1) $(cT)^* = \overline{c}T^*$

(2) Sei $[T]_{\mathcal{X}} \coloneqq A$ und $\mathcal{Y}$ die Basis wie in II.
Es gilt $[T^*]_{\mathcal{Y}} = \overline{A^t} \coloneqq A^*$ (i.e. der ij-te Koeffizient von A^* ist $\overline{a_{ji}}$, wobei a_{ij} der ij-te Koeefizient von A ist).

(3) $\det A^* = \overline{\det A}$

(4) Die Eigenwerte von A^* sind die Konjugierten der Eigenwerte von A.

(5) Seien $T_1, T_2 \in L(V, V)$. Es gilt: $(T_1T_2)^* = T_2^*T_1^*$.

(6) Seien $T_1, T_2 \in L(V, V)$. Es gilt: $(T^{-1})^* = (T^*)^{-1}$.

27 Script zur Vorlesung: Lineare Algebra II

Prof. Dr. Salma Kuhlmann

In Abschnitt 17 betrachten wir Hermite'sche Operatoren und in Abscnitt 18 schief Hermite'sche Operatoren. Wir beenden das Skript mit der Zerlegung eines Operators.

§ 17 Hermite'sche Operatoren

Unser Ansatz ist weiterhin: V endl. dim. Raum mit innerem Produkt.

Erinnerung 27.0:
In Folgerung 26.10 (IV) wurde für $T \in \mathcal{L}(V,V)$ die Abbildung $T^* \in \mathcal{L}(V,V)$ für $x, y \in V$ definiert durch:

$$(Tx \mid y) = (x \mid T^* y),$$

oder

$$(x \mid Ty) = (T^* x \mid y).$$

Definition 27.1.

(*i*) $T \in \mathcal{L}(V,V)$ ist *Hermite'sch* (oder selbstadjungiert), falls $T = T^*$, i.e. $(Tx \mid y) = (x \mid Ty)$ für alle $x, y \in V$.

(*ii*) $K = \mathbb{R}$; $T = T^*$; T heißt auch *reell symmetrisch*.

(*iii*) $K = \mathbb{C}; T = T^*$ heißt auch *komplex Hermite'sch*.

Satz 27.2.
Sei $T \in \mathcal{L}(V,V)$ Hermite'sch. Es gelten $(Tx \mid x) \in \mathbb{R}$ für alle $x \in V$ und alle Eigenwerte von T sind reell.

Beweis:
$(Tx \mid x) = (x \mid T(x)) = \overline{(Tx \mid x)}$.
Sei nun $Tx = cx$ mit $x \neq 0$, dann ist
$\underbrace{(Tx \mid x)}_{\in \mathbb{R}} = (cx \mid x) = c\|x\|^2$. Also $c \in \mathbb{R}$. □

• Matrizendarstellungen von Hermite'schen Operatoren:

Sei $\mathcal{X}$ eine orthonormale Basis. Also ist $\mathcal{Y} = \mathcal{X}$ ($\mathcal{X}$ ist Selbstdual, ÜB). Also impliziert $T = T^*$, dass A *Hermite'sch* ist, wobei

$$A := [T]_{\mathcal{X}} = [T^*]_{\mathcal{Y}} = [T^*]_{\mathcal{X}} = \overline{A^t} := A^*.$$

Das heißt $a_{ij} = \overline{a_{ji}}$ (A ist *komplex Hermite'sch*), und im reellen Fall $a_{ij} = a_{ji}$, i.e. $A = A^t$ (A ist *symmetrisch*).

Bemerkung 27.3.
Weitere Eigenschaften von Hermite'schen Opteratoren (ÜA):

(*i*) Umgekehrt sei A Hermite'sch und $\mathcal{X}$ eine orthonormale Basis für V mit $\mathcal{X} = \{x_1, \dots, x_n\}$.
Definiere $T(\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i x_i) := A \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix}$. Dann ist T Hermite'sch.

(*ii*) T_1, T_2 sind Hermite'sch $\Rightarrow T_1 + T_2$ ist Hermite'sch.

(*iii*) $T \neq 0$ ist Hermite'sch, $\alpha \in K, \alpha \neq 0$, dann ist αT Hermite'sch genau dann, wenn $\alpha \in \mathbb{R}$.

(*iv*) T ist invertierbar und Hermite'sch genau dann, wenn T^{-1} Hermite'sch ist.

Satz 27.4.
Seien T_1, T_2 Hermite'sch. Es gilt: T_1T_2 ist Hermite'sch genau dann, wenn $T_1T_2 = T_2T_1$.

Beweis
$(T_1T_2)^* = T_1T_2 \Leftrightarrow T_2^*T_1^* = T_1T_2 \Leftrightarrow T_2T_1 = T_1T_2$ □

Satz 27.5.

(*i*) Sei T_1 Hermite'sch, dann ist $T_2^*T_1T_2$ Hermite'sch.

(*ii*) Umgekehrt ist $T_2^*T_1T_2$ Hermite'sch und T_2 invertierbar, dann ist T_1 Hermite'sch.

Beweis

(*i*) $(T_2^*T_1T_2)^* = T_2^*T_1^*T_2^{**} = T_2^*T_1T_2$

(*ii*) $T_2^*T_1T_2 = (T_2^*T_1T_2)^* = T_2^*T_1^*T_2$, multipliziert links mit $(T_2^*)^{-1}$ und rechts mit T_2^{-1} ergibt $T_1 = T_1^*$. □

§ 18 Cartesische Zerlegung eines Operators

Definition 27.6.
$T \in \mathcal{L}(V, V)$ ist *schief Hermite'sch*, falls $T^* = -T$. (Wenn $K = \mathbb{C}$, heißt es "komplex schief Hermite'sch" und wenn $K = \mathbb{R}$, heißt es "schief symmetrisch".)

Bemerkung 27.7.
• Sei $T \in \mathcal{L}(V, V)$, schreibe $T = T_1 + T_2$, wobei

$$T_1 := \frac{T + T^*}{2} \quad \text{und} \quad T_2 := \frac{T - T^*}{2}$$

wobei:

$$T_1^* = T_1 \quad \text{und} \quad T_2^* = -T_2.$$

Also ist T_1 Hermite'sch und T_2 ist schief Hermite'sch.

• Wenn $K = \mathbb{C}, T_2$ ist schief Hermite'sch $\Leftrightarrow T_2 = iT_3$ mit T_3 komplex Hermite'sch. Also $T = T_1 + iT_3$.

28 Script zur Vorlesung: Lineare Algebra II

Prof. Dr. Salma Kuhlmann

In Abschnitt 19 werden wir Isometrien kennenlernen, und zeigen dass diese lineare Operatoren die Distanz und die Norm erhalten. In Abschnitt 20 untersuchen wir den Zusammenhang zwischen Isometrien und orthonormalen Basen. In Abschnitt 21 führen wir normale Operatoren ein, und sagen den Spektralsatz aus. Diesen beweisen wir dann in Skript 29.

Sei V ein endlich dimensionaler K-Vektorraum und $(\ |\ )$ ein inneres Produkt.

§ 19 Isometrie

Definition 28.1.
Sei $U \in \mathcal{L}(V,V)$, so dass $U^* = U^{-1}$, dann heißt U eine *Isometrie*.
• Wenn $K = \mathbb{R}$ und $U^* = U^{-1}$, heißt U *orthogonal*.
• Wenn $K = \mathbb{C}$ und $U^* = U^{-1}$, heißt U *unitär*.

Satz 28.2.
Für $U \in \mathcal{L}(V,V)$ sind äquivalent:

(1) $U^*U = UU^* = Id$

(2) $(Ux \mid Uy) = (x \mid y)$ für alle x,y (U erhält $(\ |\ )$).

(3) $\|Ux\| = \|x\|$ für alle x (U erhält die Norm).

Beweis:
(1) ⇒ (2):
$(Ux \mid Uy) = (x \mid U^*Uy) = (x \mid y)$ für alle $x,y \in V$

(2) ⇒ (3):
(2) anwenden mit $x = y$

(3) ⇒ (1):
$(Ux \mid Ux) = (U^*Ux \mid x) = (x \mid x)$. Also $([U^*U - Id]x \mid x) = 0$ für alle $x \in V$. Setze $T := U^*U - Id$, dann ist T Hermite'sch (wegen 27.3(ii)). Ferner gilt $(Tx \mid x) = 0$ für alle x. Wir behaupten, dass auch $(Tx \mid y) = 0$ für alle x,y $(*)$. Benutze folgende Gleichungen für Hermite'sche Operatoren.
• Für $K = \mathbb{R}$: $2(Tx \mid y) = (T(x+y) \mid |x+y) - (T(x-y) \mid x-y)$ und für $K = \mathbb{C}$
• $4(Tx \mid y) = (T(x+y) \mid x+y) - (T(x-y) \mid x-y) + i(T(x+iy) \mid x+iy) - i(T(x-iy) \mid x-iy)$.

Insbesondere gilt $(Tx \mid Tx) = 0$ für alle x (nehme $y := T(x)$ in $(*)$), also $T = 0$. □

Bemerkung 28.3.

(*i*) (3) impliziert, dass U die Distanz erhält, das heißt:
(4) $\|Ux - Uy\| = \|x - y\|$ für alle $x, y \in V$

(*ii*) Da Isometrien invertierbar sind und das innere Produkt erhalten, ist die Abbildung $U : (V, (\ |\ )) \xrightarrow{\sim} (V, (\ |\ ))$ ein *Automorphismus* des inneren Produkt-Vektorraums $(V, (\ |\ ))$.

Satz 28.4.
Eigenwerte von Isometrien haben den absoluten Betrag gleich 1.

Beweis:
Sei $Ux = cx, x \neq 0; c \in \mathbb{C}$.
Es ist $\|Ux\| = \|x\|$ und $\|Ux\| = \|cx\| = |c|\ \|x\|$. Also $|c| = 1$. □

§ 20 Orthonormal-Basis wechseln

Satz 28.5.
Sei $\mathcal{X} = \{x_1, \ldots, x_n\}$ eine orthonormale Basis und $U \in \mathcal{L}(V, V)$. Dann ist U eine Isometrie genau dann, wenn $\mathcal{UX} := \{Ux_1, \ldots, Ux_n\}$ eine orthonormale Basis ist.

Beweis:
"⇒" $(Ux_i \mid Ux_j) = (x_i \mid x_j) = \delta_{ij}$. Also ist $\mathcal{UX}$ orthonormal und $\mathcal{UX}$ ist eine Basis, weil $\mathcal{U}$ invertierbar ist.

"⇐" Sei $\mathcal{UX}$ orthonormal. Es gilt also $(Ux_i \mid Ux_j) = \delta_{ij} = (x_i \mid x_j)$ für alle $1 \leq i, j \leq n$ und damit durch Linearität gilt $(Ux \mid Uy) = (x \mid y)$ für alle $x, y \in V$. □

Matrix-Version:

Definition 28.6.
Sei $A \in M_{n \times n}(K)$.
- Wenn $(K = \mathbb{R})$ und $AA^* = A^*A = I_n$, heißt A *orthogonal*
- Wenn $(K = \mathbb{C})$ und $AA^* = A^*A = I_n$, heißt A *unitär.*

Bemerkung 28.7.

(*i*) Seien U eine Isometrie und $\mathcal{X}$ eine orthonormale Basis, dann ist $A := [U]_{\mathcal{X}}$ unitär (bzw. orthogonal).

(*ii*) Matrix-Version von Satz 28.5:
Sei $\mathcal{X}$ eine orthonormale Basis und $\mathcal{B}'$ eine beliebige Basis, dann ist $\mathcal{B}'$ orthonormal genau dann, wenn die Basiswechsel-Matrix unitär ist.

§ 21 Spektral-Theorie

In diesem Kapitel haben wir bisher drei wichtige Klassen von Operatoren studiert:
(a) Hermit'sche ($T^* = T$)
(b) schief Hermite'sche ($T^* = -T$)
(c) unitäre ($T^* = T^{-1}$).

Alle erfüllen die folgende Eigenschaft:

Definition 28.8.
$T \in \mathcal{L}(V, V)$ ist normal, falls $T^*T = TT^*$ ist.

Wir werden die Struktur von normalen Operatoren genau untersuchen und wollen den Hauptsatz des Kapitels beweisen:

Satz 28.9. Spektralsatz für normale Operatoren.
Sei $T \in \mathcal{L}(V, V)$ normal. Setze $p := \text{Min. Pol. } (T)$. Dann ist $p = p_1 \cdots p_k$, wobei $p_i \neq p_j$ für $i \neq j$ und für alle i ist p_i normiert und irreduzibel ($\deg p_i = 1$ oder $\deg p_i = 2$).
Für jedes i sei $W_i := \ker p_i(T)$ der T-invariante Unterraum von V. Dann ist W_i orthogonal zu W_j für $i \neq j$ und $V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_k$ (das heißt V ist die orthogonale direkte Summe von $W_1, \ldots, W_k$).

Für den Beweis brauchen wir Hilfslemmata.

Lemma 28.10.
Sei $T \in \mathcal{L}(V, V)$ und $W \subseteq V$ T-invariant, dann ist $W^\perp \subseteq V$ T^*-invariant.

Beweis:
Sei $u \in W^\perp, w \in W$ und berechne $(w \mid T^*u) = (Tw \mid u) = 0$ für alle $w \in W$. Also ist $T^*u \in W^\perp$. □

Fortsetzung in Skript 29.

29 Script zur Vorlesung: Lineare Algebra II

Prof. Dr. Salma Kuhlmann

In diesem Skript werden wir zunächst einige Hilfslemmata beweisen, so dass wir den Spektralsatz nachweisen können. Damit beenden wir Abschnitt 21. In Abschnitt 22 kommen wir zurück auf die Begriffe von Diagonalisierung. Mithilfe von $(\ |\ )$ erhalten wir diesbezüglich stärkere Aussagen als die vom Kapitel III. In Abschnitt 23 untersuchen wir die Eigenwerte von normalen Operatoren mithilfe vom Spektralsatz.

Sei V ein endlich dimensionaler K-Vektorraum, $(\ |\ )$ ein inneres Produkt auf V und $T \in \mathcal{L}(V,V)$.

Bemerkung 29.1.
Da $T = T^{**}$ (siehe ÜB 11) wenden wir Lemma 28.10 auf T^* an und bekommen: $W \subseteq V$ ist $T*$-invariant $\Rightarrow W^\perp$ ist T-invariant.

Lemma 29.2.
Sei T normal, $g(x) \in K[x]$ und $W := \ker g(T)$. Dann ist $W^\perp$ T-invariant.

Beweis:
Wir zeigen, dass W T^*-invariant ist. Da $TT^* = T^*T$ ist es einfach zu prüfen, dass auch $g(T)T^* = T^*g(T)$. Sei $u \in W$. Berechne: $g(T)(T^*(u)) = T^*(g(T)(u)) = T^*(0) = 0$. Also ist auch $T^*(u) \in W$. Bemerkung 29.1 impliziert nun: $W^\perp$ ist T-invariant. □

Bemerkung 29.3.
Ist g ein Faktor von $p :=$ Min. Pol. (T), dann ist $g(T)$ **nicht** invertierbar. In der Tat, sei $p = gh$ mit $0 < \deg h < \deg p$. Wäre $g(T)$ invertierbar , dann hätten wir
$0 = g(T)^{-1}p(T) = g(T)^{-1}g(T)h(T)$ und damit $h(T) = 0$. Widerspruch zu $\deg p$ ist minimal.

Beweis von Spektralsatz (Satz 28.9)

• Wir bemerken vorab, dass W_i T-invariant ist, für alle $i = 1, \dots, k$ (s. Beispiel 21.2(2)).

• Sei $p = p_1 \cdots p_k$ die Primfaktorisierung von p (s. Satz 5.15). Wir müssen zeigen, dass $p_i \neq p_j$ für alle $i \neq j$ und dass $V = W_1 \oplus \ldots \oplus W_k$. Beweis via Induktion nach k. Für $k = 1$ ist nichts zu zeigen. Wir nehmen an, die Behauptung gilt für $k - 1$.

• Lemma 29.2 impliziert, dass ${W_1}^\perp$ T-invariant ist. Bemerke, dass $p_1 =$ Min. Pol. (T_{W_1}) (per Definition von W_1 und Irreduzibilität von p_1). Betrachte $T_{{W_1}^\perp}$ und bemerke, dass $\ker(T_{{W_1}^\perp}) = \{0\}$ ($x \in {W_1}^\perp$ und $x \in \ker p_1(T) = W_1 \Rightarrow x = 0$). Also ist $p_1(T_{{W_1}^\perp})$ invertierbar und damit (wegen 29.3) ist p_1 **kein** Faktor von Min. Pol. $(T_{{W_1}^\perp}) =: P_2$ (i.e. p_1 und P_2 sind teilerfremd). Aus Aufgabe 9.3 folgt aber $p = kgV(p_1, P_2) = p_1 P_2$. Also ist $P_2 = p_2 \cdots p_k$. Damit gilt $p_1 \neq p_j$ für $j = 2, \dots, k$.

• Nun wollen wir die Induktionsannahme auf $T_{{W_1}^\perp}$ und P_2 anwenden. Bemerke, dass ${W_1}^\perp$ auch $T*$-invariant ist (Lemma 28.10) und deshalb $T^*_{{W_1}^\perp} = (T_{{W_1}^\perp})^*$. Da T normal ist, folgt nun, dass auch $T_{{W_1}^\perp}$ normal ist. Bemerke auch, dass $\ker p_i(T_{W_1}) = \{0\}$, für alle $i = 2, \dots, k$, da $p_1 =$ Min. Pol. (T_{W_1}) und p_1 und p_i teilerfremd sind (wie im Beweis von 23.3 schreibe $I = p_1(T_{W_1})q_1(T_{W_1}) + p_i(T_{W_1})q_2(T_{W_1}) = p_i(T_{W_1})q_2(T_{W_1})$). Es folgt, dass $W_i = \ker p_i(T_{{W_1}^\perp})$.

• Nun können wir die Induktionsannahme anwenden und bekommen also $p_i \neq p_j$ für $i \neq j$, $i, j = 2, \dots, k$ und ${W_1}^\perp = W_2 \oplus \ldots \oplus W_k$. □

§ 22 Orthonormale Diagonalisierung

Korollar 29.4.
$K = \mathbb{C}$. Sei T normal. Es gibt eine orthonormale Basis bestehend aus Eigenvektoren von T.

Beweis:
Seien p, p_i und W_i wie im Spektralsatz. Für alle $i = 1, \dots, k$ ist p_i linear über $\mathbb{C}$, $p_i = (x - c_i)$. Damit ist W_i der Eigenraum zum Eigenwert c_i. Wähle nun eine orthonormale Basis $\mathcal{X}_i$ für W_i für alle $i = 1, \dots, k$ (G-S). Also besteht $\mathcal{X}_i$ aus EigenV. zum EigenW. c_i für alle $i = 1, \dots, k$. Folglich ist $\mathcal{X} = \mathcal{X}_1 \cup \dots \cup \mathcal{X}_k$ die gewünschte Basis. □

Definition 29.5.
Seien $B, A \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$.

(i) A ist normal, falls $AA^* = A^*A$

(ii) A ist unitär äquivalent zu B, falls es eine unitäre $U \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$ mit $B = U^{-1}AU$ gibt.

Korollar 29.6. (Matrixversion von Korollar 29.4.)
Sei $A \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$, A normal, dann ist A unitär äquivalent zu einer diagonalen Matrix $D \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$.

§ 23 Anwendungen vom Spektralsatz

Korollar 29.7.
$K = \mathbb{C}$, T ist normal. Es gilt: T ist Hermite'sch $\Leftrightarrow$ alle Eigenwerte $\in \mathbb{R}$.

Beweis:

"$\Rightarrow$" Ist schon bewiesen worden.

"$\Leftarrow$" Seien alle Eigenwerte reell und $\mathcal{J}$ eine orthonormale Basis, bestehend aus EigenV. Also ist

$$D = [T]_{\mathcal{J}} = \begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n \end{pmatrix} \text{ mit } d_i \in \mathbb{R}.$$

Es ist klar, dass D Hermite'sch ist ($D^* = \overline{D^t} = D^t = D$). Also ist auch T Hermite'sch (siehe Folgerung 26.10(2)) □

Korollar 29.8.
$K = \mathbb{C}, T$ ist normal. Es gilt: T ist unitär $\Leftrightarrow$ alle Eigenwerte haben den Absolutbetrag 1.

Beweis:

"$\Rightarrow$" Ist schon bewiesen worden.

"$\Leftarrow$" Seien die Eigenwerte $z_1, \dots z_n$ und $\mathcal{J}$ eine orthonormale Basis bestehend aus EigenV, so dass

$$[T]_{\mathcal{J}} = \begin{pmatrix} z_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & z_n \end{pmatrix} = D.$$

Behauptung: D ist unitär.

Berechne $D^* = \overline{D^t} = \begin{pmatrix} \overline{z}_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \overline{z}_n \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} \text{Also } DD^* &= \begin{pmatrix} z_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & z_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{z}_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \overline{z}_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} z_1\overline{z}_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & z_n\overline{z}_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} = I_n \end{aligned}$$

Also ist auch T unitär (siehe Folgerung 26.10(2)). $\square$