29 Script zur Vorlesung: Lineare Algebra II

Prof. Dr. Salma Kuhlmann

In diesem Skript werden wir zunächst einige Hilfslemmata beweisen, so dass wir den Spektralsatz nachweisen können. Damit beenden wir Abschnitt 21. In Abschnitt 22 kommen wir zurück auf die Begriffe von Diagonalisierung. Mithilfe von $(\ |\ )$ erhalten wir diesbezüglich stärkere Aussagen als die vom Kapitel III. In Abschnitt 23 untersuchen wir die Eigenwerte von normalen Operatoren mithilfe vom Spektralsatz.

Sei V ein endlich dimensionaler K-Vektorraum, $(\ |\ )$ ein inneres Produkt auf V und $T \in \mathcal{L}(V,V)$.

Bemerkung 29.1.
Da $T = T^{**}$ (siehe ÜB 11) wenden wir Lemma 28.10 auf T^* an und bekommen: $W \subseteq V$ ist $T\star$-invariant $\Rightarrow W^\perp$ ist T-invariant.

Lemma 29.2.
Sei T normal, $g(x) \in K[x]$ und $W := \ker g(T)$. Dann ist $W^\perp$ T-invariant.

Beweis:
Wir zeigen, dass W T^*-invariant ist. Da $TT^* = T^*T$ ist es einfach zu prüfen, dass auch $g(T)T^* = T^*g(T)$. Sei $u \in W$. Berechne: $g(T)(T^*(u)) = T^*(g(T)(u)) = T^*(0) = 0$. Also ist auch $T^*(u) \in W$. Bemerkung 29.1 impliziert nun: $W^\perp$ ist T-invariant. □

Bemerkung 29.3.
Ist g ein Faktor von $p :=$ Min. Pol. (T), dann ist $g(T)$ **nicht** invertierbar. In der Tat, sei $p = gh$ mit $0 < \deg h < \deg p$. Wäre $g(T)$ invertierbar , dann hätten wir
$0 = g(T)^{-1}p(T) = g(T)^{-1}g(T)h(T)$ und damit $h(T) = 0$. Widerspruch zu $\deg p$ ist minimal.

Beweis von Spektralsatz (Satz 28.9)

- Wir bemerken vorab, dass W_i T-invariant ist, für alle $i = 1,\dots,k$ (s. Beispiel 21.2(2)).
- Sei $p = p_1 \cdots p_k$ die Primfaktorisierung von p (s. Satz 5.15). Wir müssen zeigen, dass $p_i \neq p_j$ für alle $i \neq j$ und dass $V = W_1 \oplus \ldots \oplus W_k$. Beweis via Induktion nach k. Für $k = 1$ ist nichts zu zeigen. Wir nehmen an, die Behauptung gilt für $k-1$.
- Lemma 29.2 impliziert, dass ${W_1}^\perp$ T-invariant ist. Bemerke, dass $p_1 =$ Min. Pol. (T_{W_1}) (per Definition von W_1 und Irreduzibilität von p_1). Betrachte $T_{{W_1}^\perp}$ und bemerke, dass $\ker(T_{{W_1}^\perp}) = \{0\}$ ($x \in {W_1}^\perp$ und $x \in \ker p_1(T) = W_1 \Rightarrow x = 0$). Also ist $p_1(T_{{W_1}^\perp})$ invertierbar und damit (wegen 29.3) ist p_1 **kein** Faktor von Min. Pol. $(T_{{W_1}^\perp}) =: P_2$ (i.e. p_1 und P_2 sind teilerfremd). Aus Aufgabe 9.3 folgt aber $p = kgV(p_1, P_2) = p_1 P_2$. Also ist $P_2 = p_2 \cdots p_k$. Damit gilt $p_1 \neq p_j$ für $j = 2,\dots,k$.
- Nun wollen wir die Induktionsannahme auf $T_{{W_1}^\perp}$ und P_2 anwenden. Bemerke, dass ${W_1}^\perp$ auch $T\star$-invariant ist (Lemma 28.10) und deshalb $T^*_{{W_1}^\perp} = (T_{{W_1}^\perp})^*$. Da T normal ist, folgt nun, dass auch $T_{{W_1}^\perp}$ normal ist. Bemerke auch, dass $\ker p_i(T_{W_1}) = \{0\}$, für alle $i = 2,\dots,k$, da $p_1 =$ Min. Pol. (T_{W_1}) und p_1 und p_i teilerfremd sind (wie im Beweis von 23.3 schreibe $I = p_1(T_{W_1})q_1(T_{W_1}) + p_i(T_{W_1})q_2(T_{W_1}) = p_i(T_{W_1})q_2(T_{W_1})$). Es folgt, dass $W_i = \ker p_i(T_{{W_1}^\perp})$.
- Nun können wir die Induktionsannahme anwenden und bekommen also $p_i \neq p_j$ für $i \neq j$, $i,j = 2,\dots,k$ und ${W_1}^\perp = W_2 \oplus \ldots \oplus W_k$. □

§ 22 Orthonormale Diagonalisierung

Korollar 29.4.
$K = \mathbb{C}$. Sei T normal. Es gibt eine orthonormale Basis bestehend aus Eigenvektoren von T.

Beweis:
Seien p, p_i und W_i wie im Spektralsatz. Für alle $i = 1, \dots, k$ ist p_i linear über $\mathbb{C}$, $p_i = (x - c_i)$. Damit ist W_i der Eigenraum zum Eigenwert c_i. Wähle nun eine orthonormale Basis $\mathcal{X}_i$ für W_i für alle $i = 1, \dots, k$ (G-S). Also besteht $\mathcal{X}_i$ aus EigenV. zum EigenW. c_i für alle $i = 1, \dots, k$. Folglich ist $\mathcal{X} = \mathcal{X}_1 \cup \dots \cup \mathcal{X}_k$ die gewünschte Basis. □

Definition 29.5.
Seien $B, A \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$.

(i) A ist normal, falls $AA^* = A^*A$

(ii) A ist unitär äquivalent zu B, falls es eine unitäre $U \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$ mit $B = U^{-1}AU$ gibt.

Korollar 29.6. (Matrixversion von Korollar 29.4.)
Sei $A \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$, A normal, dann ist A unitär äquivalent zu einer diagonalen Matrix $D \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$.

§ 23 Anwendungen vom Spektralsatz

Korollar 29.7.
$K = \mathbb{C}$, T ist normal. Es gilt: T ist Hermite'sch $\Leftrightarrow$ alle Eigenwerte $\in \mathbb{R}$.

Beweis:

"$\Rightarrow$" Ist schon bewiesen worden.

"$\Leftarrow$" Seien alle Eigenwerte reell und $\mathcal{J}$ eine orthonormale Basis, bestehend aus EigenV. Also ist
$$D = [T]_{\mathcal{J}} = \begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n \end{pmatrix} \text{ mit } d_i \in \mathbb{R}.$$
Es ist klar, dass D Hermite'sch ist ($D^* = \overline{D^t} = D^t = D$). Also ist auch T Hermite'sch (siehe Folgerung 26.10(2)) □

Korollar 29.8.
$K = \mathbb{C}, T$ ist normal. Es gilt: T ist unitär $\Leftrightarrow$ alle Eigenwerte haben den Absolutbetrag 1.

Beweis:

"$\Rightarrow$" Ist schon bewiesen worden.

"$\Leftarrow$" Seien die Eigenwerte $z_1, \dots z_n$ und $\mathcal{J}$ eine orthonormale Basis bestehend aus EigenV, so dass
$$[T]_{\mathcal{J}} = \begin{pmatrix} z_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & z_n \end{pmatrix} = D.$$
Behauptung: D ist unitär.

Berechne $D^* = \overline{D^t} = \begin{pmatrix} \overline{z}_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \overline{z}_n \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} \text{Also } DD^* &= \begin{pmatrix} z_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & z_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \overline{z}_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \overline{z}_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} z_1\overline{z}_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & z_n\overline{z}_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} = I_n \end{aligned}$$

Also ist auch T unitär (siehe Folgerung 26.10(2)). □