28 Script zur Vorlesung: Lineare Algebra II

Prof. Dr. Salma Kuhlmann

In Abschnitt 19 werden wir Isometrien kennenlernen, und zeigen dass diese lineare Operatoren die Distanz und die Norm erhalten. In Abschnitt 20 untersuchen wir den Zusammenhang zwischen Isometrien und orthonormalen Basen. In Abschnitt 21 führen wir normale Operatoren ein, und sagen den Spektralsatz aus. Diesen beweisen wir dann in Skript 29.

Sei V ein endlich dimensionaler K-Vektorraum und $(\ |\ )$ ein inneres Produkt.

§ 19 Isometrie

Definition 28.1.
Sei $U \in \mathcal{L}(V,V)$, so dass $U^* = U^{-1}$, dann heißt U eine *Isometrie*.
- Wenn $K = \mathbb{R}$ und $U^* = U^{-1}$, heißt U *orthogonal*.
- Wenn $K = \mathbb{C}$ und $U^* = U^{-1}$, heißt U *unitär*.

Satz 28.2.
Für $U \in \mathcal{L}(V,V)$ sind äquivalent:

(1) $U^*U = UU^* = Id$

(2) $(Ux \mid Uy) = (x \mid y)$ für alle x, y (U erhält $(\ |\ )$).

(3) $\|Ux\| = \|x\|$ für alle x (U erhält die Norm).

Beweis:
(1) $\Rightarrow$ (2):
$(Ux \mid Uy) = (x \mid U^*Uy) = (x \mid y)$ für alle $x, y \in V$

(2) $\Rightarrow$ (3):
(2) anwenden mit $x = y$

(3) $\Rightarrow$ (1):
$(Ux \mid Ux) = (U^*Ux \mid x) = (x \mid x)$. Also $([U^*U - Id]x \mid x) = 0$ für alle $x \in V$. Setze $T := U^*U - Id$, dann ist T Hermite'sch (wegen 27.3(ii)). Ferner gilt $(Tx \mid x) = 0$ für alle x. Wir behaupten, dass auch $(Tx \mid y) = 0$ für alle x, y $(*)$. Benutze folgende Gleichungen für Hermite'sche Operatoren.
- Für $K = \mathbb{R}$: $2(Tx \mid y) = (T(x+y) \mid |x+y) - (T(x-y) \mid x-y)$ und für $K = \mathbb{C}$
- $4(Tx \mid y) = (T(x+y) \mid x+y) - (T(x-y) \mid x-y) + i(T(x+iy) \mid x+iy) - i(T(x-iy) \mid x-iy)$.

Insbesondere gilt $(Tx \mid Tx) = 0$ für alle x (nehme $y := T(x)$ in $(*)$), also $T = 0$. $\square$

Bemerkung 28.3.

(*i*) (3) impliziert, dass U die Distanz erhält, das heißt:
(4) $\|Ux - Uy\| = \|x - y\|$ für alle $x, y \in V$

(*ii*) Da Isometrien invertierbar sind und das innere Produkt erhalten, ist die Abbildung $U : (V, (\ |\ )) \xrightarrow{\sim} (V, (\ |\ ))$ ein *Automorphismus* des inneren Produkt-Vektorraums $(V, (\ |\ ))$.

Satz 28.4.
Eigenwerte von Isometrien haben den absoluten Betrag gleich 1.

Beweis:
Sei $Ux = cx, x \neq 0; c \in \mathbb{C}$.
Es ist $\|Ux\| = \|x\|$ und $\|Ux\| = \|cx\| = |c|\ \|x\|$. Also $|c| = 1$. □

§ 20 Orthonormal-Basis wechseln

Satz 28.5.
Sei $\mathcal{X} = \{x_1, \ldots, x_n\}$ eine orthonormale Basis und $U \in \mathcal{L}(V, V)$. Dann ist U eine Isometrie genau dann, wenn $\mathcal{U}\mathcal{X} := \{Ux_1, \ldots, Ux_n\}$ eine orthonormale Basis ist.

Beweis:
"⇒" $(Ux_i \mid Ux_j) = (x_i \mid x_j) = \delta_{ij}$. Also ist $\mathcal{U}\mathcal{X}$ orthonormal und $\mathcal{U}\mathcal{X}$ ist eine Basis, weil $\mathcal{U}$ invertierbar ist.

"⇐" Sei $\mathcal{U}\mathcal{X}$ orthonormal. Es gilt also $(Ux_i \mid Ux_j) = \delta_{ij} = (x_i \mid x_j)$ für alle $1 \leq i, j \leq n$ und damit durch Linearität gilt $(Ux \mid Uy) = (x \mid y)$ für alle $x, y \in V$. □

Matrix-Version:

Definition 28.6.
Sei $A \in M_{n \times n}(K)$.
- Wenn $(K = \mathbb{R})$ und $AA^* = A^*A = I_n$, heißt A *orthogonal*
- Wenn $(K = \mathbb{C})$ und $AA^* = A^*A = I_n$, heißt A *unitär.*

Bemerkung 28.7.

(*i*) Seien U eine Isometrie und $\mathcal{X}$ eine orthonormale Basis, dann ist $A := [U]_{\mathcal{X}}$ unitär (bzw. orthogonal).

(*ii*) Matrix-Version von Satz 28.5:
Sei $\mathcal{X}$ eine orthonormale Basis und $\mathcal{B}'$ eine beliebige Basis, dann ist $\mathcal{B}'$ orthonormal genau dann, wenn die Basiswechsel-Matrix unitär ist.

§ 21 Spektral-Theorie

In diesem Kapitel haben wir bisher drei wichtige Klassen von Operatoren studiert:
(a) Hermit'sche ($T^* = T$)
(b) schief Hermite'sche ($T^* = -T$)
(c) unitäre ($T^* = T^{-1}$).

Alle erfüllen die folgende Eigenschaft:

Definition 28.8.
$T \in \mathcal{L}(V, V)$ ist normal, falls $T^*T = TT^*$ ist.

Wir werden die Struktur von normalen Operatoren genau untersuchen und wollen den Hauptsatz des Kapitels beweisen:

Satz 28.9. Spektralsatz für normale Operatoren.
Sei $T \in \mathcal{L}(V, V)$ normal. Setze $p := \text{Min. Pol. } (T)$. Dann ist $p = p_1 \cdots p_k$, wobei $p_i \neq p_j$ für $i \neq j$ und für alle i ist p_i normiert und irreduzibel ($\deg p_i = 1$ oder $\deg p_i = 2$).
Für jedes i sei $W_i := \ker p_i(T)$ der T-invariante Unterraum von V. Dann ist W_i orthogonal zu W_j für $i \neq j$ und $V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_k$ (das heißt V ist die orthogonale direkte Summe von $W_1, \dots, W_k$).

Für den Beweis brauchen wir Hilfslemmata.

Lemma 28.10.
Sei $T \in \mathcal{L}(V, V)$ und $W \subseteq V$ T-invariant, dann ist $W^\perp \subseteq V$ T^*-invariant.

Beweis:
Sei $u \in W^\perp, w \in W$ und berechne $(w \mid T^*u) = (Tw \mid u) = 0$ für alle $w \in W$. Also ist $T^*u \in W^\perp$. □

Fortsetzung in Skript 29.