27 Script zur Vorlesung: Lineare Algebra II

Prof. Dr. Salma Kuhlmann

In Abschnitt 17 betrachten wir Hermite'sche Operatoren und in Abscnitt 18 schief Hermite'sche Operatoren. Wir beenden das Skript mit der Zerlegung eines Operators.

§ 17 Hermite'sche Operatoren

Unser Ansatz ist weiterhin: V endl. dim. Raum mit innerem Produkt.

Erinnerung 27.0:
In Folgerung 26.10 (IV) wurde für $T \in \mathcal{L}(V,V)$ die Abbildung $T^* \in \mathcal{L}(V,V)$ für $x, y \in V$ definiert durch:

$$(Tx \mid y) = (x \mid T^* y),$$

oder

$$(x \mid Ty) = (T^* x \mid y).$$

Definition 27.1.

(i) $T \in \mathcal{L}(V,V)$ ist *Hermite'sch* (oder selbstadjungiert), falls $T = T^*$, i.e. $(Tx \mid y) = (x \mid Ty)$ für alle $x, y \in V$.

(ii) $K = \mathbb{R}$; $T = T^*$; T heißt auch *reell symmetrisch.*

(iii) $K = \mathbb{C}; T = T^*$ heißt auch *komplex Hermite'sch.*

Satz 27.2.
Sei $T \in \mathcal{L}(V,V)$ Hermite'sch. Es gelten $(Tx \mid x) \in \mathbb{R}$ für alle $x \in V$ und alle Eigenwerte von T sind reell.

Beweis:
$(Tx \mid x) = (x \mid T(x)) = \overline{(Tx \mid x)}$.
Sei nun $Tx = cx$ mit $x \neq 0$, dann ist
$\underbrace{(Tx \mid x)}_{\in \mathbb{R}} = (cx \mid x) = c\|x\|^2$. Also $c \in \mathbb{R}$. □

• Matrizendarstellungen von Hermite'schen Operatoren:

Sei $\mathcal{X}$ eine orthonormale Basis. Also ist $\mathcal{Y} = \mathcal{X}$ ($\mathcal{X}$ ist Selbstdual, ÜB). Also impliziert $T = T^*$, dass A *Hermite'sch* ist, wobei

$$A := [T]_{\mathcal{X}} = [T^*]_{\mathcal{Y}} = [T^*]_{\mathcal{X}} = \overline{A^t} := A^*.$$

Das heißt $a_{ij} = \overline{a_{ji}}$ (A ist *komplex Hermite'sch*), und im reellen Fall $a_{ij} = a_{ji}$, i.e. $A = A^t$ (A ist *symmetrisch*).

Bemerkung 27.3.
Weitere Eigenschaften von Hermite'schen Opteratoren (ÜA):

(i) Umgekehrt sei A Hermite'sch und $\mathcal{X}$ eine orthonormale Basis für V mit $\mathcal{X} = \{x_1, \dots, x_n\}$.
Definiere $T(\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i x_i) := A \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix}$. Dann ist T Hermite'sch.

(ii) T_1, T_2 sind Hermite'sch $\Rightarrow T_1 + T_2$ ist Hermite'sch.

(iii) $T \neq 0$ ist Hermite'sch, $\alpha \in K, \alpha \neq 0$, dann ist αT Hermite'sch genau dann, wenn $\alpha \in \mathbb{R}$.

(iv) T ist invertierbar und Hermite'sch genau dann, wenn T^{-1} Hermite'sch ist.

Satz 27.4.
Seien T_1, T_2 Hermite'sch. Es gilt: $T_1 T_2$ ist Hermite'sch genau dann, wenn $T_1 T_2 = T_2 T_1$.

Beweis
$(T_1 T_2)^* = T_1 T_2 \Leftrightarrow T_2^* T_1^* = T_1 T_2 \Leftrightarrow T_2 T_1 = T_1 T_2$ □

Satz 27.5.

(i) Sei T_1 Hermite'sch, dann ist $T_2^* T_1 T_2$ Hermite'sch.

(ii) Umgekehrt ist $T_2^* T_1 T_2$ Hermite'sch und T_2 invertierbar, dann ist T_1 Hermite'sch.

Beweis

(i) $(T_2^* T_1 T_2)^* = T_2^* T_1^* T_2^{**} = T_2^* T_1 T_2$

(ii) $T_2^* T_1 T_2 = (T_2^* T_1 T_2)^* = T_2^* T_1^* T_2$, multipliziert links mit $(T_2^*)^{-1}$ und rechts mit T_2^{-1} ergibt $T_1 = T_1^*$. □

§ 18 Cartesische Zerlegung eines Operators

Definition 27.6.
$T \in \mathcal{L}(V, V)$ ist *schief Hermite'sch*, falls $T^* = -T$. (Wenn $K = \mathbb{C}$, heißt es "komplex schief Hermite'sch" und wenn $K = \mathbb{R}$, heißt es "schief symmetrisch".)

Bemerkung 27.7.
• Sei $T \in \mathcal{L}(V, V)$, schreibe $T = T_1 + T_2$, wobei

$$T_1 := \frac{T + T^*}{2} \quad \text{und} \quad T_2 := \frac{T - T^*}{2}$$

wobei:

$$T_1^* = T_1 \quad \text{und} \quad T_2^* = -T_2.$$

Also ist T_1 Hermite'sch und T_2 ist schief Hermite'sch.

• Wenn $K = \mathbb{C}, T_2$ ist schief Hermite'sch $\Leftrightarrow T_2 = iT_3$ mit T_3 komplex Hermite'sch. Also $T = T_1 + iT_3$.