26 Script zur Vorlesung: Lineare Algebra II

Prof. Dr. Salma Kuhlmann

In Skript 26 werden wir die Eigenschaften von $(\ \mid\ )$ und $\|\ \|$ beweisen und das Gram-Schmidt Verfahren kennenlernen. In Abschnitt 16 werden wir mithilfe vom Riesz-Darstellungssatz die Beziehung zu V^* untersuchen.

Satz 26.1. (Ungleichung von Schwarz.)
Für alle $x, y \in V$ gilt: $|(x \mid y)| \leq \|x\| \ \|y\|$.

Beweis:
Wenn $y = 0$, dann ist die Ungleichung einfach zu prüfen. Sei also $y \neq 0$. Setze $y_1 := \frac{y}{\|y\|}$ so dass $\{y_1\}$ orthonormal ist. Bessel's Ungleichung Satz 25.10 impliziert nun $|(x \mid y)|^2 \leq \|x\|^2$.
Nun $\frac{1}{\|y\|^2}|(x \mid y)|^2 \leq \|x\|^2 \Rightarrow |(x \mid y)|^2 \leq \|x\|^2 \ \|y\|^2$ □

Definition 26.2.
$\delta(x, y) := \|x - y\|$ ist die *Distanz* zwischen x und y.

Proposition 26.3.
Für alle $x, y, z \in V$ gilt:

(i) $\delta(x, y) = \delta(y, x)$

(ii) $\delta(x, y) \geq 0$; $\delta(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

(iii) $\delta(x, y) \leq \delta(x, z) + \delta(z, y)$ ($\triangle$ Ungleichung).

(iv) $\delta(x, y) = \delta(x + z, y + z)$

Beweis
Wir beweisen nur (iii), die anderen Behauptungen werden analog bewiesen.
(iii) (Dreiechsungleichung für Norm und Distanz.)
$\|x + y\|^2 = (x + y \mid x + y) = \|x\|^2 + (x \mid y) + (y \mid x) + \|y\|^2 = \|x\|^2 + (x \mid y) + \overline{(x \mid y)} + \|y\|^2 =$
$\|x\|^2 + 2Re(x \mid y) + \|y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2|(x \mid y)| + \|y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\|x\| \ \|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2$ □

Bemerkung 26.4.
Ein inneres Produkt definiert also auch ein Norm, d.h. die Abbildung
$x \longmapsto \|x\|$ erfüllt für alle $x, y \in V$:

(i) $x = 0 \Leftrightarrow \|x\| = 0$

(ii) $\|cx\| = |c| \ \|x\|$

(iii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Definition 26.5.
Sei S eine Basis, S orthonormal, dann heißt S eine orthonormale Basis.

Satz 26.6. (Gram-Schmidt.)
Sei V ein n-dimensionaler K-Vektorraum versehen mit einem inneren Produkt. Dann hat V eine orthonormale Basis.

Beweis
Sei $\mathcal{X} = \{x_1, \ldots, x_n\}$ eine Basis. Wir werden eine orthonormale Basis

$$\mathcal{J} = \{y_1, \ldots, y_n\}$$

per Induktion bilden.

I. Anfang: $x_1 \neq 0$. Setze $y_1 := \frac{x_1}{\|x_1\|}$.

I.A: Seien $y_1, \ldots, y_r$ schon definiert, so dass $\{y_1, \ldots, y_r\}$ orthonormal und $y_j \in span\{x_1, \ldots, x_j\}$ für $j = 1, \ldots, r$.

I.S.: Betrachte

$$z := x_{r+1} - \sum_{i=1}^{r} c_i y_i, c_i \in K \qquad (*)$$

Berechne $(z \mid y_j) = (x_{r+1} \mid y_j) - c_j$ für $j = 1, \ldots, r$. Nun setze $c_j = (x_{r+1} \mid y_j)$. Mit dieser Wahl in $(*)$ ist $(z \mid y_j) = 0$ für alle $j = 1, \ldots, r$ und

$$z \in span\{x_{r+1}, y_1, \ldots, y_r\} \subseteq span\{x_{r+1}, x_1, \ldots, x_r\},$$

$z \neq 0$, da $x_1, \ldots, x_{r+1}$ linear unabhängig sind und der Koeffizient in $(*)$ von x_{r+1} ist nicht Null. Nun setze $y_{r+1} := \frac{z}{\|z\|}$. □

Satz 26.7.
Sei W ein Unterraum. Es gilt

(1) $V = W \oplus W^\perp$

(2) $W^{\perp\perp} = W$.

Beweis:
(1) Sei $\mathcal{X} = \{x_1, \ldots, x_n\}$ eine orthonormale Basis für W und $z \in V$. Schreibe

$$W \ni x := \sum_{i=1}^{n} c_i x_i, \text{ wobei } c_i = (z \mid x_i).$$

Bessel liefert: $y := z - x$ ist orthogonal zu x_i und damit zu W, das heißt $y \in W^\perp$. Also $z = x + y$, $x \in W, y \in W^\perp$. Es gilt ferner, dass $W \cap W^\perp = \{0\}$ (weil $(x \mid x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$).

(2) $z = x + y$. Also $(z \mid x) = \|x\|^2 + (y \mid x) = \|x\|^2$. Analog $(z \mid y) = \|y\|^2$.
Wenn $z \in W^{\perp\perp}$, dann $(z \mid y) = 0 = \|y\|^2$. So $z = x \in W$. □

§ 16 Lineare Funktionale

Satz 26.8. (Riesz-Darstellung)
Sei V ein endlich dim. K-Vektorraum, versehen mit $(\ |\ )$.
Sei $f \in V^*$. Es existiert genau ein $y \in V$ mit $f(x) = (x \mid y)$ für alle $x \in V$. (†)

Beweis:
Existenz: $f = 0 \Rightarrow y = 0$.
Sei $f \neq 0; W := \ker(f) \subsetneq V; W^\perp \neq \{0\}$.

- Sei $y_0 \neq 0;\ y_0 \in W^\perp;\ OE\|y_0\| = 1$.

Setze $y := \overline{f(y_0)}y_0$. Beobachte $(y_0 \mid y) = (y_0 \mid \overline{f(y_0)}y_0) = f(y_0)(y_0 \mid y_0) = f(y_0)$.

Somit ist (†) erfüllt für y_0.

- Für $x = \lambda y_0$ berechnen wir allgemeiner: $f(x) = f(\lambda y_0) = \lambda f(y_0) = \lambda(y_0 \mid y) = (\lambda y_0 \mid y)$. Also ist (†) erfüllt.
- Für $x \in W : (x \mid y) = (x \mid \overline{f(y_0)}y_0) = f(y_0)(x \mid y_0) = 0 = f(x)$. Also ist (†) erfüllt.
- Sei nun $x \in V$, schreibe $x = x_0 + \lambda y_0$ mit $\lambda := \frac{f(x)}{f(y_0)}$ und $x_0 := x - \lambda y_0$.

Berechne $f(x_0) = f(x) - \frac{f(x)}{f(y_0)}f(y_0) = 0$, so ist $x_0 \in W$
und $f(x) = f(x_0)+f(\lambda y_0) = (x_0 \mid y)+(\lambda y_0 \mid y) = (x_0+\lambda y_0 \mid y) = (x \mid y)$. Also ist (†) immer erfüllt.

- Eindeutigkeit:

Seien $y_1, y_2 \in V$ mit $(x \mid y_1) = (x \mid y_2)$ für alle $x \in V$. Dann $(x \mid y_1 - y_2) = 0$ für alle $x \in V$, insbesondere für $x := (y_1 - y_2)$ bekommen wir $\|y_1 - y_2\|^2 = 0$, so $y_1 - y_2 = 0$. □

Satz 26.9.
Die Abbildung $\rho : V^* \longrightarrow V;\ f \longmapsto y$
(i.e. $\rho(f)$ ist eindeutig definiert durch $f(x) = (x \mid \rho(f))$ für alle $x \in V$) erfüllt:

(*i*) $\rho(f_1 + f_2) = \rho(f_1) + \rho(f_2)$

(*ii*) ρ ist surjektiv

(*iii*) ρ ist injektiv, aber Achtung

(*iv*) $\rho(cf) = \overline{c}\rho(f)$ für alle $c \in K$, i.e. ρ ist ein konjugierter Isomorphismus.

Beweis:

(i) ÜA.

(ii) $y \in V$. Betrachte $f(x) := (x \mid y)$. $f \in V^*$ und $\rho(f) = y$.

(iii) $f(x) = (x \mid 0) = 0$ für alle $x \Rightarrow f = 0$.

(iv) $z := \rho(cf); y := \rho(f)$. Zeige: $Z = \overline{c}y$, i.e. für alle $x \in V$: $(cf)(x) = (x \mid \overline{c}y)$.
Berechne: $(cf)(x) = cf(x) = c(x \mid y) = (x \mid \overline{c}y)$ □

Folgerungen 26.10.
Folgerungen I., II., III. und IV. hierunter sowie Eigenschaften (1), (2), (3), (4), (5) und (6) werden im Übungsblatt ausgearbeitet.

I. $(f_1 \mid f_2) := (\rho(f_2) \mid \rho(f_1))$ definiert ein inneres Produkt auf V^*.

II. Sei $\mathcal{X} = \{x_1, \ldots, x_n\}$ eine Basis für V, dann existiert $\mathcal{Y} = \{y_1, \ldots, y_n\}$ eine Basis für V mit $(x_i \mid y_j) = \delta_{ij}$ für alle i, j.

III. $W^0 \subseteq W^*$ wird ersetzt durch $W^\perp \subseteq V$, i.e. $\rho(W^0) = W^\perp$.

IV. Sei $T \in \mathcal{L}(V, V)$. Definiere T^* durch $(Tx \mid y) := (x \mid T^* y)$ für alle $x \in V$ (d.h. $T^*(y) = z$, genau dann, wenn für alle $x \in V : (x \mid z) = (Tx \mid y)$).

Es gilt $T^* \in \mathcal{L}(V, V)$. T^* ist die transponierte (adjungierte) Konjugierte.
Eigenschaft der tranponierten Konjugierten

(1) $(cT)^* = \overline{c} T^*$

(2) Sei $[T]_{\mathcal{X}} := A$ und $\mathcal{Y}$ die Basis wie in II.
Es gilt $[T^*]_{\mathcal{Y}} = \overline{A^t} := A^*$ (i.e. der ij-te Koeffizient von A^* ist $\overline{a_{ji}}$, wobei a_{ij} der ij-te Koeefizient von A ist).

(3) $\det A^* = \overline{\det A}$

(4) Die Eigenwerte von A^* sind die Konjugierten der Eigenwerte von A.

(5) Seien $T_1, T_2 \in L(V, V)$. Es gilt: $(T_1 T_2)^* = T_2^* T_1^*$.

(6) Seien $T_1, T_2 \in L(V, V)$. Es gilt: $(T^{-1})^* = (T^*)^{-1}$.