22 Script zur Vorlesung: Lineare Algebra II

Prof. Dr. Salma Kuhlmann

Wir setzen die Untersuchung der Matrixdarstellung begonnen in Abschnitt 12, Skript 21 fort.

Sei V ein endlich dimensionaler K-Vektorraum.

Lemma 22.1.

(1) Sei $W \subseteq V$ ein Unterraum; $\mathcal{B}' \subseteq W$ eine Basis für W, $\mathcal{B}' \cup \mathcal{B}''$ eine ergänzte Basis für V. Dann ist $\overline{\mathcal{B}''}$ eine Basis für V/W.

(2) Umgekehrt sei $(\overline{\alpha_{r+q}}, \dots, \overline{\alpha_n})$ eine Basis für V/W, dann ist $\mathcal{B}' \cup (\alpha_{r+1}, \dots, \alpha_n)$ eine Basis für V.

Beweis: Siehe ÜB.

Satz 22.2.
Sei $W \subseteq V, T \in \mathcal{L}(V,V)$ und W T-invariant. Sei $\mathcal{B}'$ eine Basis für W, ergänze zu einer Basis $\mathcal{B} = \mathcal{B}' \uplus \mathcal{B}''$ von V. Es gilt:

$$A := [T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} B & C \\ 0 & D \end{pmatrix},$$

wobei $B = [T_W]_{\mathcal{B}'},\ D = [\overline{T}]_{\overline{\mathcal{B}''}}$, und $\overline{\mathcal{B}''} = \{\overline{\alpha}\ ;\ \alpha \in \mathcal{B}''\}$.

Beweis:
Setze $r := \dim W$; sei $\mathcal{B}' := (\alpha_1, \dots, \alpha_r)$ und $\mathcal{B} = (\alpha_1, \dots, \alpha_r, \alpha_{r+1}, \dots, \alpha_n)$ die geordneten Basen. Die Aussage über die $r \times r$-Matrix B ist bereits in Skript 21 bewiesen worden.
Wir analysieren die $(n-r) \times (n-r)$-Matrix D. Die Matrix $A = [T]_{\mathcal{B}}$ ist durch die folgenden Gleichungen definiert:

$$T(\alpha_i) = \sum_{j=1}^{n} A_{ji}\alpha_j \text{ für } 1 \leq i \leq n \qquad (\ast)$$

$$A = \left(\begin{array}{c|c|c|c} \begin{matrix} B \\ r \times r \\ --- \\ \\ \end{matrix} & [T(\alpha_{r+1})]_{\mathcal{B}} & \cdots & [T(\alpha_n)]_{\mathcal{B}} \end{array}\right)$$

$$\mathcal{B} = \{\underbrace{\alpha_1, \dots, \alpha_r}_{|\mathcal{B}'|=r}, \underbrace{\alpha_{r+1}, \dots, \alpha_n}_{|\mathcal{B}''|=(n-r)}\}$$

$$\overline{\mathcal{B}''} = \{\underbrace{\overline{\alpha_{r+1}}, \dots, \overline{\alpha_n}}_{|\mathcal{B}''|=(n-r)}\}$$

Schreibe

$$A = \left(\begin{array}{c|c|c|c} & A_{1(r+1)} & & A_{1n} \\ B & \vdots & & \vdots \\ --- & A_{r(r+1)} & & A_{rn} \\ & A_{(r+1)(r+1)} & \cdots & A_{(r+1)n} \\ & \vdots & & \vdots \\ & A_{n(r+1)} & & A_{nn} \end{array}\right)$$

oder für $1 \le i \le n$

$$T(\alpha_i) = \underbrace{\sum_{j=1}^{r} A_{ji}\alpha_j}_{\in W} + \sum_{j=r+1}^{n} A_{ji}\alpha_j \qquad (**)$$

und damit ist:

$\overline{T(\alpha_i)} = \sum_{j=r+1}^{n} A_{ji}\overline{\alpha_j} = \overline{T}(\overline{\alpha_i})$ für $r+1 \le i \le n$. □

Aus Satz 22.2 (und Aufgabe 9.2 d)) folgt nun:

Korollar 22.3.
Char. Pol. $T =$ (Char. Pol. T_W)(Char. Pol. $\overline{T}$).

Für eine analoge Aussage über Min. Pol. T siehe ÜB.

Bemerkung 22.4.
Die Aussage im Korollar 22.5 haben wir schon in Skript 20, Satz 20.3 bewiesen. Man kann einen zweiten Beweis mithilfe von T_W und $\overline{T}$ führen.

Korollar 22.5.
T ist trigonalisierbar genau dann, wenn Char. Pol. (T) in ein Produkt von linearen Faktoren über K zerfällt.

Beweis: Siehe ÜB.

Nun betrachten wir die obige Aussage für Min. Pol. (T).

Korollar 22.6.
Sei V endl. dim., $T \in \mathcal{L}(V,V)$. T is trigonalisierbar genau dann, wenn Min. Pol. (T) in ein Produkt von linearen Faktoren über K zerfällt.

Beweis:
Wir zeigen: Char. Pol. (T) zerfällt in ein Produkt von linearen Faktoren über K genau dann, wenn Min. Pol. (T) in ein Produkt von linearen Faktoren über K zerfällt..

"$\Rightarrow$" Min. Pol. (T) teilt Char. Pol. (T). Da lineare Faktoren irreduzibel sind, folgt aus der Eindeutigkeit der Primfaktorisierung in $K[x]$, dass auch Min. Pol. (T) ein Produkt von linearen Faktoren ist.

"⇐" Sei Min. Pol. $(T) = \prod_{i=1}^{k}(x - c_i)^{\nu_i}$.

Min. Pol. (T) teilt Char. Pol. (T). Also Char. Pol. $(T) =$ Min. Pol. $(T)q(x)$ mit $q(x) \in K[x]$. Wenn $\deg(q(x)) = 0$ dann ist $q(x) = 1$. Sei also $\deg(q(x)) > 0$ und sei $C \supseteq K$ eine Körpererweiterung so dass $q(x)$ über C als Produkt zerfällt:

$$q(x) = \prod_{j=1}^{\ell}(x - d_j).$$

(Die Existenz vom *Zerfällungskörper* C werden wir in der Algebra-Vorlesung B3 im nächsten Semester beweisen.)

Wegen Satz 19.6 und Satz 20.1 haben Min. Pol. (T) und Char. Pol. (T) dieselben Nullstellen in C. Wir behaupten nun, dass d_j bereits in K liegt und $d_j = c_i$ für ein geeignetes i. Dies gilt, weil d_j sonst eine Nullstelle von Char. Pol. (T), also auch von Min. Pol. (T) mit $d_j \in C \setminus K$ (i.e. $d_j \in C$ aber $d_j \notin K$) wäre.
Dies ist aber unmöglich, da Min. Pol. (T) bereits alle seine Nullstellen in K hat. □