

20 Script zur Vorlesung: Lineare Algebra II

Prof. Dr. Salma Kuhlmann

In diesem Skript werden wir zunächst den Satz von Cayley Hamilton aussagen und beweisen. Der Satz ist u.a. für die Berechnung von MinPol sehr hilfreich. Wir beenden Abschnitt 10 indem wir die folgende wichtige Frage beantworten: Sei $A \in M_{n \times n}(\mathbb{Q})$. Da $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$ ist auch $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ und sogar $A \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$. Ändern sich deshalb die charakteristischen und minimalen Polynome von A ? Im Abschnitt 11 werden wir den Begriff von Trigonalisierbarkeit (der arme Vetter von Diagonalisierbarkeit) einführen und studieren.

Satz von Cayley Hamilton.

Sei V ein n -dimensionaler K -Vektorraum und $L \in \mathcal{L}(V, V)$, $f := \text{Char. Pol.}(L)$.

Es gilt $f(L) = 0$. Insbesondere teilt min. Pol. (L) das Char. Pol. (L).

Beweis:

Seien \mathcal{K} die Algebra der Polynome in L und $\mathcal{B} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ eine Basis für V .

Setze $A := [L]_{\mathcal{B}}$, das heißt $L(\alpha_i) = \sum_{j=1}^n A_{ji} \alpha_j$ für alle $1 \leq i \leq n$.

Wir schreiben diese Gleichungen um, als

$$(1) \sum_{j=1}^n (\delta_{ij} L - A_{ji} I)(\alpha_j) = 0 \text{ für alle } 1 \leq i \leq n.$$

Sei B die $n \times n$ -Matrix mit dem Koeffizienten in der Algebra \mathcal{K} definiert durch

$$B_{ij} := \delta_{ij} L - A_{ji} I.$$

Behauptung: Es ist $\det B = f(L) = 0$. Wir argumentieren wie folgt:

Wir haben $f(x) = \det(xI - A) = \det(xI - A)^t$. Wir berechnen $(xI - A)^t_{ij} = \delta_{ij} x - A_{ji}$. Also ist $(xI - A)^t_{ij}(L) = \delta_{ij} L - A_{ji} I = B_{ij}$. Außerdem gilt $[\det(xI - A)^t](L) = \det[(xI - A)^t(L)]$ (siehe ÜB). Somit gilt

$$f(L) = [\det(xI - A)](L) = [\det(xI - A)^t](L) = \det[(xI - A)^t(L)] = \det B.$$

Wir zeigen nun, dass $\det B = 0$. Dafür genügt es zu zeigen, dass $(\det B)(\alpha_k) = 0$ für alle $k = 1, \dots, n$. Wegen (1) gelten für B_{ij} und α_j :

$$(2) \sum_{j=1}^n B_{ij}(\alpha_j) = 0 \text{ für alle } 1 \leq i \leq n.$$

Setze $\tilde{B} := \text{adj} B$. Aus (2) folgt für alle k und i : $\tilde{B}_{ki}(\sum_{j=1}^n B_{ij} \alpha_j) = 0 = \sum_{j=1}^n \tilde{B}_{ki} B_{ij} \alpha_j$.

Wir summieren über i und bekommen:

$$0 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \tilde{B}_{ki} B_{ij} \alpha_j = \sum_{j=1}^n \underbrace{\left(\sum_{i=1}^n \tilde{B}_{ki} B_{ij} \right)}_{kj\text{-te Koeff. von } \tilde{B}B} (\alpha_j).$$

Nun ist (wegen Korollar 16.7) $\tilde{B}B = (\det B)I$, also $\sum_{i=1}^n \tilde{B}_{ki}B_{ij} = \delta_{kj} \det B$.

Also $0 = \sum_{j=1}^n \delta_{kj} (\det B)(\alpha_j) = (\det B)(\alpha_k)$. □

Nun beantworten wir die **Wichtige Frage** der Einleitung. Sei $F_0 \subset F_1$ eine Körpererweiterung; wir bemerken, dass $M_{n \times n}(F_0) \subseteq M_{n \times n}(F_1)$.

Satz 20.1.

Sei $F_0 \subseteq F_1$ eine Körpererweiterung. Sei $A \in M_{n \times n}(F_0)$, und seien

$$\text{Char. Pol.}_{F_0}(A) \text{ und Min. Pol.}_{F_0}(A)$$

beziehungsweise

$$\text{Char. Pol.}_{F_1}(A) \text{ und Min. Pol.}_{F_1}(A)$$

die charakteristischen bzw. minimalen Polynome von A jeweils als Element aus $M_{n \times n}(F_0)$ und $M_{n \times n}(F_1)$. Dann gelten

- (1) Char. Pol. $_{F_0}(A) = \text{Char. Pol.}_{F_1}(A)$ und
- (2) Min. Pol. $_{F_0}(A) = \text{Min. Pol.}_{F_1}(A)$.

Beweis:

- (1) Ist offensichtlich, weil $\det(B)$ nur von Koeffizienten der Matrix B abhängen.
- (2) (i) Wir untersuchen zunächst die folgende Frage: Wie entscheiden wir, für den gegebenen Körper K und der natürlichen Zahl $k \in \mathbb{N}$, ob es ein Polynom $p \in K[x]$ gibt mit $\deg(p) = k$ und $p(A) = 0$?

Dafür lösen wir ein Matrixgleichungssystem

$$A^k + x_{k-1}A^{k-1} + \dots + x_0I = 0. \quad (*)$$

(*) ist also ein lineares Gleichungssystem mit n^2 Gleichungen in der Variablen x_0, \dots, x_{k-1} . Jede Lösung $a_0, \dots, a_{k-1} \in K$ gibt uns ein Polynom $p(x) := x^k + \sum_{j=0}^{k-1} a_j x^j$ mit $p(x) \in \mathcal{A}(A)$.

Wenn wir (*) für die kleinste natürliche Zahl k , für die es eine Lösung gibt, gelöst haben, dann ist die Lösung a_0, \dots, a_{k-1} eindeutig, weil sie uns die eindeutig definierten Koeffizienten $1, a_{k-1}, \dots, a_0$ von Min. Pol. $_K(A)$ von A über K liefert.

Wir folgern: Sei k minimal, so dass (*) eine Lösung in K hat, dann liefert diese Lösung das Min. Pol. $_K(A)$.

- (ii) Nun untersuchen wir Lösungen für das LGS:

Sei $B \in M_{m \times n}(F_0)$, $F_0 \subseteq F_1$ Körpererweiterung, $Y \in F_0^{m \times 1}$. Betrachte

$$BX = Y \quad (S)$$

Wir behaupten: wenn (S) eine Lösung in $F_1^{n \times 1}$ hat, dann hat (S) auch eine Lösung in $F_0^{n \times 1}$ (und umgekehrt natürlich!): Dies gilt, weil alleine aus der r.Z.S.F. $(B | Y)$ können wir entscheiden, ob es Lösungen gibt (siehe LA I Script 6; Satz 6.3 **Zweck**). (bzgl. F_1) Nun ist aber die r.Z.S.F. eindeutig (insbesondere unabhängig vom betrachteten Grundkörper), also ist r.Z.S.F. $(B | Y)$ bzgl. F_1 gleich r.Z.S.F. $(B | Y)$ bzgl. F_0 .

Aus (i) und (ii) sehen wir, dass $(*)$ eine Lösung $(a_0, \dots, a_{k-1}) \in F_1^k$ genau dann hat, wenn es eine Lösung in F_0^k hat. Die Eindeutigkeit des Min. Pol. F_1 liefert außerdem, dass die Lösung in F_0^k auch (a_0, \dots, a_{k-1}) sein muss! \square

§ 11 Trigonalisierbarkeit, invariante Unterräume

Sei V ein endlich dim. K -Vektorraum.

Definition 20.2.

$T \in \mathcal{L}(V, V)$ ist trigonalisierbar, falls es eine Basis \mathcal{B} für V gibt, so dass $[T]_{\mathcal{B}}$ eine obere Dreiecksmatrix (i.e. $a_{ij=0}$ für $i > j$) ist.

Satz 20.3.

Sei V n -dim., $T \in \mathcal{L}(V, V)$. Es gilt: T ist trigonalisierbar \Leftrightarrow Char. Pol. (T) zerfällt in Linearfaktoren über K (i.e. Char. Pol. $(T) = (x - c_1)^{n_1} \dots (x - c_k)^{n_k}$ mit $c_i \in K$).

Beweis

“ \Rightarrow ” Klar, weil $[T]_{\mathcal{B}} = A$ eine obere Dreiecksmatrix ist, also $\det(xI - A)$ ist das Produkt $\prod_{i=1}^n (x - a_{ii})$.

“ \Leftarrow ” Wir werden per Induktion eine Basis $\mathcal{B} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ aufbauen, in der $[T]_{\mathcal{B}}$ eine obere Dreiecksmatrix ist. Da T wenigstens einen Eigenwert hat, hat T auch einen Eigenvektor zum Eigenwert $c_1 \in K$. Sei $\alpha \neq 0$ solch ein Eigenvektor und ergänze zu einer Basis $(\alpha, \beta_2, \dots, \beta_n)$ für V (geordnet, so dass α der erste Vektor davon ist).

Betrachte diesbezüglich die Matrixdarstellung von T :

$$\left(\begin{array}{c|ccc} c_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \hline & & & \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \\ 0 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{array} \right) \left. \vphantom{\begin{array}{c|ccc} c_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \hline & & & \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \\ 0 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{array}} \right\} \Gamma \in M_{(n-1) \times (n-1)}(K)$$

Sei $G \in \mathcal{L}(W, W)$, wobei $W := \text{span}(\beta_2, \dots, \beta_n)$ definiert durch $Gw := \Gamma w$, für alle $w \in W$. Wir sehen also Char. Pol. $(T) = (x - c_1) \text{Char. Pol.}(G)$. Da Char. Pol. (T) ein Produkt von linearen Faktoren ist, so ist es auch Char. Pol. (G) . Die Induktionsannahme liefert eine Basis $(\alpha_2, \dots, \alpha_n)$, in der G eine obere Dreiecksmatrix-Darstellung hat:

$$\left(\begin{array}{c|ccc} c_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \hline & & & \\ & & \diagdown & \\ & & & \diagdown & \\ & & & & \diagdown \end{array} \right)$$

Setze $\alpha_1 := \alpha$ und setze $\mathcal{B} := (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ \square