Tag der Mathematik 2012

Gruppenwettbewerb
Einzelwettbewerb
Mathematische Hürden

Aufgaben mit Lösungen

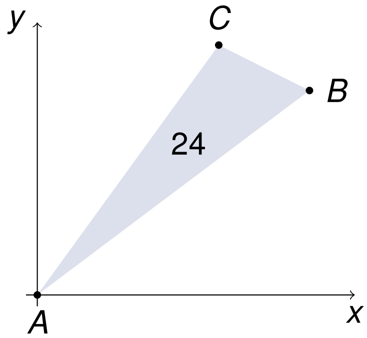
Allgemeine Hinweise:
Als Hilfsmittel dürfen nur Schreibzeug, Geodreieck und Zirkel benutzt werden. Taschenrechner sind nicht zugelassen.

Aufgaben bitte nur auf den Aufgabenblättern bearbeiten und abgeben!

Aufgabe G1

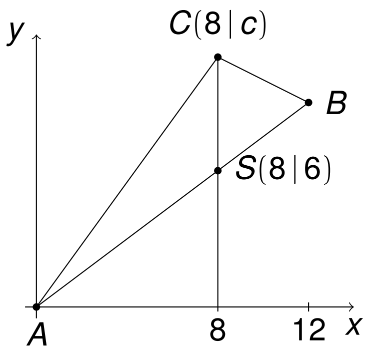
Gegeben sind die Punkte $A(0\,|\,0)$, $B(12\,|\,9)$ und $C(8\,|\,c)$.

Für welche c hat das Dreieck ABC die Fläche 24?



Lösung

Für $c = 6$ ist die Fläche 0. Sei $S(8\,|\,6)$.



Aus $\Delta ABC = \Delta ASC + \Delta SBC = 24$ folgt entweder

$$\frac{1}{2}(c-6)(8+4) = 24 \text{ für } c > 6$$

oder

$$\frac{1}{2}(6-c)(8+4) = 24 \text{ für } c < 6.$$

Also ist $c = 10$ oder $c = 2$

Aufgabe G2

Für die Parabel $f(x) = ax^2 + bx + c$ gilt

(i) $f(x) = f'(x) \cdot f'(x)$,

(ii) $\int_1^2 f(x)dx = \frac{7}{12}$,

(iii) $f'(1) < 0$.

Bestimmen Sie a, b und c.

Lösung

(i) Aus

$$ax^2 + bx + c = (2ax + b)^2 = 4a^2x^2 + 4abx + b^2$$

folgt $a = 4a^2$, $b = 4ab$ und $c = b^2$, also

$$f(x) = \frac{1}{4}x^2 + bx + b^2.$$

(ii) Aus

$$\int_1^2 (\frac{1}{4}x^3 + bx + b^2)dx = \left[\frac{1}{12}x^3 + \frac{1}{2}bx^2 + b^2x\right]_1^2 = \frac{7}{12} + \frac{3}{2}b + b^2 = \frac{7}{12}$$

folgt $b(\frac{3}{2} + b) = 0$, also $b = 0$ oder $b = -\frac{3}{2}$.

(iii) Aus $f'(1) < 0$ folgt $\frac{1}{2} + b < 0$. Wegen (ii) gilt $b = -\frac{3}{2}$.

Somit gilt $f(x) = \frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{9}{4}$.

Aufgabe G3

Die Geraden $y = x + 1$, $y = mx - 1$ und $y = -4x + 2m$ gehen alle durch einen Punkt. Bestimmen Sie alle möglichen Werte von m.

Lösung

Aus $x + 1 = mx - 1$ und $mx - 1 = -4x + 2m$ folgt

$$x = \frac{2}{m-1}$$

und

$$2m^2 - 3m - 9 = 0.$$

Also gilt $(m-3)(2m+3) = 0$ und somit $m = 3$ oder $m = -\frac{3}{2}$.

Aufgabe G4

Tom und Jerry gehen unabhängig von einander zweimal jede Woche um 12 Uhr ins gleiche Restaurant zum Essen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sie sich

a) keinmal,

b) genau einmal,

c) zweimal

treffen?

Lösung

In einer Urne sind 5 weiße und 2 schwarze Kugeln. Die beiden schwarzen Kugeln bedeuten die beiden Wochentage, an denen Tom ins Restaurant geht. Jerry zieht zwei Kugeln aus der Urne.

a) $P(\text{kein Treffen}) = P(\text{zwei weiße Kugeln})$
$$= \frac{\binom{5}{2}}{\binom{7}{2}} = \frac{5}{7} \cdot \frac{4}{6} = \frac{10}{21}.$$

b) $P(\text{genau ein Treffen}) = P(\text{eine weiße und eine schwarze Kugel})$
$$= \frac{\binom{5}{1}\binom{2}{1}}{\binom{7}{2}} = \frac{5}{7} \cdot \frac{2}{6} + \frac{2}{7} \cdot \frac{5}{6} = \frac{10}{21}.$$

c) $P(\text{zwei Treffen}) = P(\text{zwei schwarze Kugeln})$
$$= \frac{\binom{2}{2}}{\binom{7}{2}} = \frac{2}{7} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{21}.$$

Aufgabe E1

Familie Meier besteht aus Mutter, Vater und mehreren Kindern. Der Vater ist 43 Jahre alt. Das durchschnittliche Alter aller Familienangehörigen ist 15, ohne den Vater ist es 11. Wie viele Kinder sind in der Familie?

Lösung

Seien k die Anzahl der Kinder und s die Summe der Alter aller Familienangehörigen. Dann gilt

$$15 = \frac{s}{k+2}$$

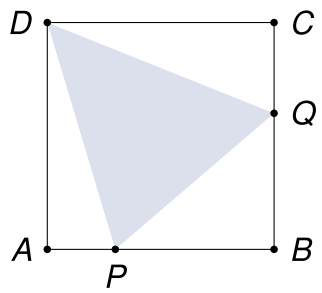
und

$$11 = \frac{s-43}{k+1}.$$

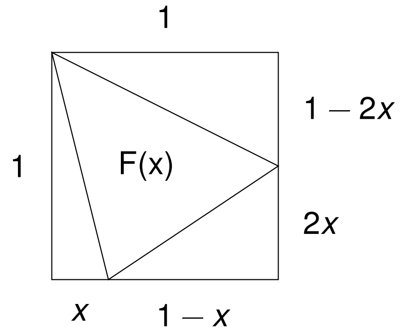
Hieraus folgt $k = 6$.

Aufgabe E2

Im Einheitsquadrat $ABCD$ werden zwei Punkte P auf AB und Q auf BC so gewählt, dass $BQ = 2 \cdot AP$. Wie muss $x := AP$ gewählt werden, damit das Dreieck PQD minimale Fläche hat?



Lösung



Fläche $F(x) = 1 - \frac{1}{2}(x + 2x(1-x) + 1 - 2x) = x^2 - \frac{x}{2} + \frac{1}{2}$.

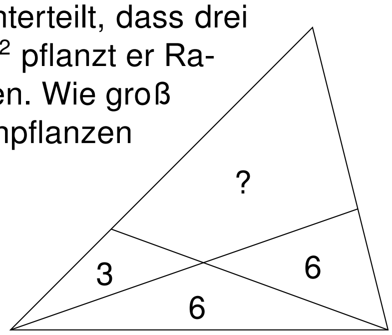
1. Lösung: $F(x) = x^2 - \frac{x}{2} + \frac{1}{2} = (x - \frac{1}{4})^2 + \frac{7}{16}$ ist minimal für $x = \frac{1}{4}$.

2. Lösung: Aus $F'(x) = 2x - \frac{1}{2} = 0$ folgt $x = \frac{1}{4}$.

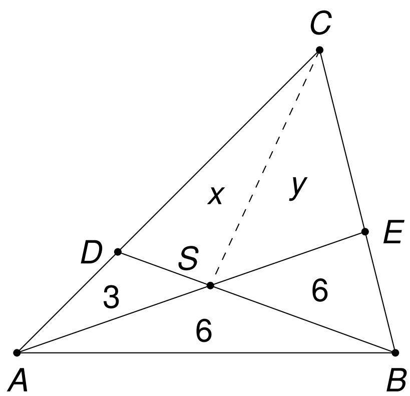
Wegen $F''(x) = 2 > 0$ liegt ein Minimum vor.

Aufgabe E3

Onkel Franz hat seinen dreieckigen Garten so unterteilt, dass drei Beete dreieckig sind und eines viereckig. Auf 3 m^2 pflanzt er Radieschen und auf jeweils 6 m^2 Kohlrabi und Möhren. Wie groß ist das viereckige Beet, auf dem er Kartoffeln anpflanzen will?



Lösung



Es ist $AS = SE$, denn die Dreiecke ABS und BES sind flächengleich und haben eine gemeinsame Höhe durch B.

Es gilt $BS = 2 \cdot DS$, denn $\Delta ABS = 2 \cdot \Delta ASD$ mit der gemeinsamen Höhe durch A.

Daher gilt für die Fläche x von ΔSCD und y von ΔSEC

$$x + 3 = y \quad \text{und} \quad \frac{x}{y+6} = \frac{1}{2}.$$

Hieraus folgt $x = 9$ und $y = 12$. Also kann Onkel Franz auf $x + y = 21$ m^2 Kartoffeln anpflanzen.

Aufgabe H1

Für welches n gilt

$$2^{2012} - 2^{2011} - 2^{2010} + 2^{2009} = n \cdot 2^{2008}?$$

Lösung

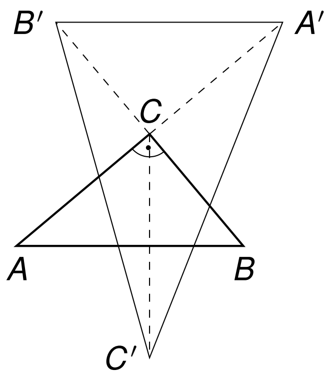
Aus

$$2^{2008} \cdot (2^4 - 2^3 - 2^2 + 2^1) = n \cdot 2^{2008}$$

folgt $n = 16 - 8 - 4 + 2 = 6$.

Aufgabe H2

Sei ABC ein rechtwinkliges Dreieck mit der Fläche 1. Spiegele A, B und C an den gegenüberliegenden Dreiecksseiten nach A', B' bzw. C'. Welche Fläche hat das Dreieck $A'B'C'$?



Lösung

Das Dreieck $A'B'C$ ist kongruent zum Dreieck ABC, also ist $A'B' = AB$ und $A'B' \| AB$. Die zu C' gehörende Höhe im Dreieck $A'B'C'$ ist dreimal so lang wie die des Dreiecks ABC. Also hat $A'B'C'$ die Fläche 3.

Aufgabe H3

Berechnen Sie a^3+b^3, wenn $a+b=5$ und $a\cdot b=1$ gilt.

Lösung

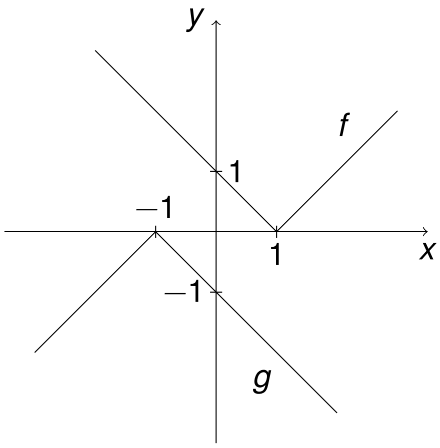
$a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)=5^3-3\cdot 1\cdot 5=110.$

Zentrum für Mathematik · Kinzigstraße 32 · 64625 Bensheim · 06251-7079941
Internet: www.z-f-m.de · Email: marius.nuechter@z-f-m.de

Aufgabe H4

Die Funktionen f und g sind im (x, y)-Koordinatensystem dargestellt. f und g entstehen aus $y = |x|$ durch Verschiebung bzw. Verschiebung und Spiegelung.

Geben Sie die Gleichungen für f und g an. Welcher Zusammenhang besteht zwischen $f(x)$ und $g(x)$?



Lösung

Es gilt

$$\begin{aligned} f(x) &= |x-1| \\ g(x) &= -|x+1| \end{aligned}$$

sowie

$$f(x) = -g(x-2).$$

Aufgabe H5

Bestimmen Sie alle Paare (a, b) natürlicher Zahlen mit $0 < a < b < 100$, für die gilt

$$\sqrt{a-\sqrt{b}} = \sqrt{b} - \sqrt{a}.$$

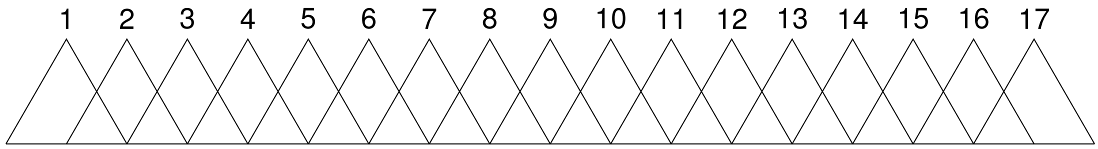
Lösung

Aus $(\sqrt{a-\sqrt{b}})^2 = (\sqrt{b}-\sqrt{a})^2$ folgt $a-\sqrt{b} = b+a-2\sqrt{ab}$, also $\sqrt{b} = 2\sqrt{a}-1$. Durch beidseitiges Quadrieren erhält man $\sqrt{a} = (4a-b+1)/4$, also ist $\sqrt{a}$ eine ganzrationale Zahl. Die folgende Tabelle enthält alle gesuchten Paare:

a	4	9	16	25
b	9	25	49	81

Aufgabe H6

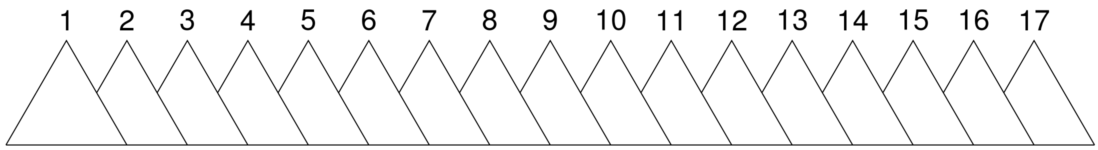
Es werden 17 gleichseitige Dreiecke (Flächeninhalt 1) so hintereinandergelegt, dass eine Seite auf einer Geraden liegt und die Seitenmitte die Ecke des benachbarten Dreiecks ist:



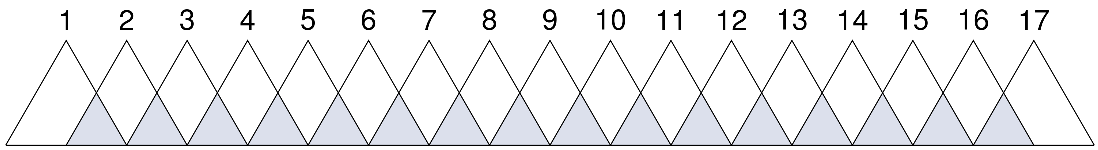
Wie groß ist die Fläche dieser sägezahnartigen Figur?

Lösung

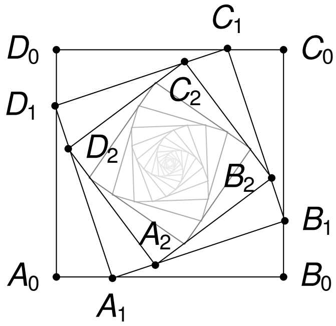
1. Lösung: Fläche: $1 + 16 \cdot \frac{3}{4} = 13$.



2. Lösung: Fläche: $17 \cdot 1 - 16 \cdot \frac{1}{4} = 13$.



Aufgabe H7



In das Quadrat $A_0B_0C_0D_0$ wird ein Quadrat so eingezeichnet, dass die Ecken A_1, B_1, C_1, D_1 die Seiten von A_0, B_0, C_0, D_0 im Verhältnis 1 : 3 teilen. Das nächste Quadrat $A_2B_2C_2D_2$ entsteht entsprechend aus $A_1B_1C_1D_1$, und so weiter.

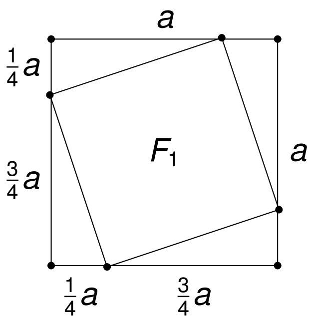
Sei F_n die Fläche des Quadrates $A_nB_nC_nD_n$. Es sei $F_0 = a^2$.

a) Berechnen Sie F_1 und F_2 in Abhängigkeit von a.

b) Welcher Zusammenhang besteht zwischen F_n und F_{n-1}?

Geben Sie eine Formel für F_n an.

Lösung



a) $F_1 = a^2 - \frac{1}{4}a \cdot \frac{3}{4}a \cdot 2 = \frac{5}{8}a^2$.
Seitenlänge von F_1: $\sqrt{\frac{5}{8}a^2} = a\sqrt{\frac{5}{8}}$.
Seitenlänge von F_2: $a\sqrt{\frac{5}{8}}\sqrt{\frac{5}{8}}$, also $F_2 = a^2 \cdot (\frac{5}{8})^2$.

b) $F_n = F_{n-1} \cdot \frac{5}{8} = F_{n-2} \cdot (\frac{5}{8})^2 = \cdots = F_0 \cdot (\frac{5}{8})^n = a^2 \cdot (\frac{5}{8})^n$.

Aufgabe H8

Wie oft ist in dem Buchstabenschema das Wort „ALFREDO“ zu lesen? Der Übergang von einem Buchstaben zum nächsten soll nur zu dem rechts oder links darunter stehenden möglich sein. Ein mögliches Wort ist markiert.

```
      A
    L   L
  F   F   F
R   R   R   R
  E   E   E
    D   D
      O
```

Lösung

1. Lösung: Kodiert man den Übergang von einem Buchstaben zum nächsten durch 1 (nach rechts) oder 0 (nach links), so ist jedes Wort eine $(0, 1)$-Folge der Länge 6 mit genau 3 Einsen und 3 Nullen. Zu jeder solchen Folge gibt es genau ein Wort. Zu dem angegebenen Beispiel gehört die Folge 101100. Also gibt es $\binom{6}{3} = 20$ Worte.

2. Lösung: Schreibt man für jeden Buchstaben die Anzahl der Worte, in denen er vorkommt, so ergibt sich ein Pascal-Dreieck, bei dem das O 20mal vorkommt.

```
      1
    1   1
  1   2   1
1   3   3   1
  4   6   4
   10  10
     20
```

Zentrum für Mathematik · Kinzigstraße 32 · 64625 Bensheim · 06251-7079941
Internet: www.z-f-m.de · Email: marius.nuechter@z-f-m.de