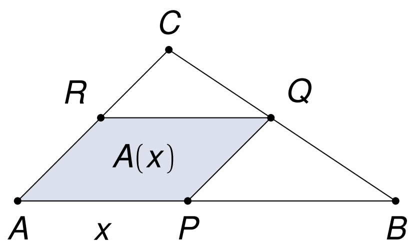
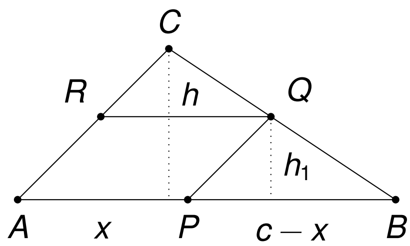
Aufgabe G1



Im Dreieck ABC sei P auf AB. Für Q auf BC und R auf AC sei $PQ \parallel AC$ bzw. $RQ \parallel AB$.

Wie muss $x := AP$ gewählt werden, damit die Fläche $A(x)$ des Parallelograms $APQR$ maximal wird?

Lösung



Da die Dreiecke ABC und PBQ ähnlich sind, gilt

$$\frac{h_1}{c-x} = \frac{h}{c}, \quad \text{und somit} \quad h_1 = \frac{h}{c}(c-x)$$

und

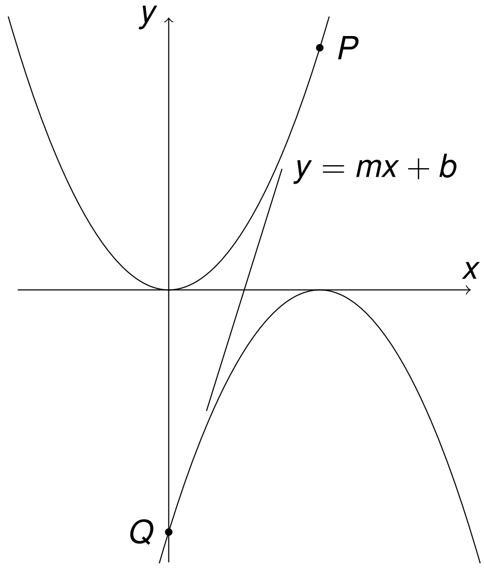
$$A(x) = x \cdot h_1 = \frac{h}{c}\left(cx - x^2\right) = \frac{h}{c}\left(\left(\frac{c}{2}\right)^2 - \left(x - \frac{c}{2}\right)^2\right).$$

$A(x)$ ist maximal für $x = \frac{c}{2}$, also ist P der Mittelpunkt von AB.

Aufgabe G2

Gegeben sind die Parabeln $y = x^2$ und $y = -(x-4)^2$. Gesucht ist die Gerade $y = mx + b$, $m \neq 0$, die Tangente an beide Parabeln ist.

Lösung



Seien $P(p\,|\,p^2)$ und $Q(q\,|-(q-4)^2)$ die Berührpunkte.

Aus

$$m = \frac{p^2 + (q-4)^2}{p-q}$$

und der Parabelsteigung

$$m = 2p = -2(q-4)$$

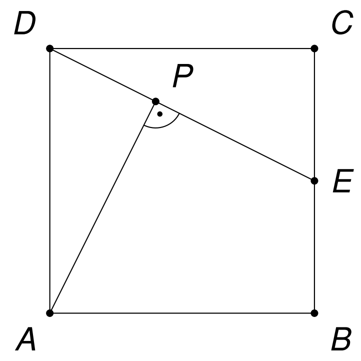
folgt

$$m = \frac{\left(\frac{m}{2}\right)^2 + \left(\frac{m}{2}\right)^2}{\frac{m}{2} - \left(-\frac{m}{2} + 4\right)}$$

und somit $m = 8$, $p = 4$ und $q = 0$.

Also ist $P(4\,|\,16)$, $Q(0\,|-16)$ und $y = 8x - 16$.

Aufgabe G3

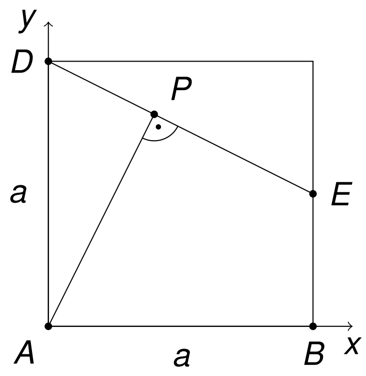


Gegeben ist ein Quadrat $ABCD$. Sei E der Mittelpunkt von BC und P der Fußpunkt des Lotes von A auf DE.

Zeigen Sie: $BP = AB$.

Lösung

1. Lösung: Im Koordinatensystem mit $A(0\,|\,0)$ und $B(a\,|\,0)$ hat die Gerade durch $D(0\,|\,a)$ und $E(a\,|\,\frac{a}{2})$ die Gleichung $y = -\frac{1}{2}x + a$ und die Gerade durch A und P die Gleichung $y = 2x$.



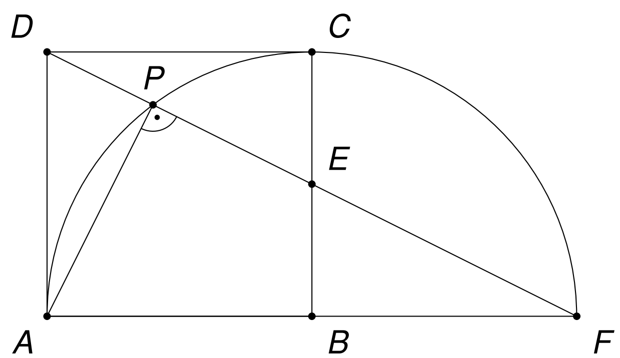
Also ist

$$P(\frac{2}{5}a\,|\,\frac{4}{5}a)$$

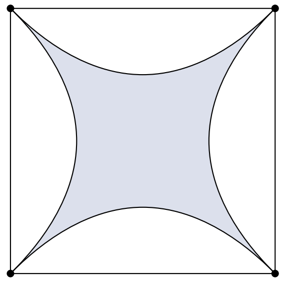
und

$$BP^2 = (a - \frac{2}{5}a)^2 + (\frac{4}{5}a)^2 = a^2.$$

2. Lösung: Sei F der Schnittpunkt von DE mit AB. Dann ist $AB = BF$ und P liegt auf dem Halbkreis über AF. Also ist $BP = AB$.



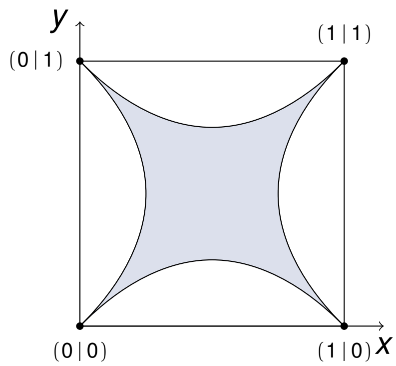
Aufgabe G4



In einem Quadrat (Seitenlänge 1) ist ein Netz aufgespannt, das begrenzt wird von vier gleichen Parabelbögen durch die Ecken des Quadrats, das heißt die Bögen sind symmetrisch* zu den Diagonalen des Quadrats. Berechnen Sie die Fläche des Netzes.

* und in den Eckpunkten tangential

Lösung



Im Koordinatensystem sind die Ecken des Quadrats $(0\,|\,0)$, $(1\,|\,0)$, $(1\,|\,1)$ und $(0\,|\,1)$.

Die Parabel durch $(0\,|\,0)$ und $(1\,|\,0)$ hat die Gleichung $y = ax(x-1)$ und die Steigung $y' = a(2x-1)$.

Für $x = 0$ ist $y' = 1$, also gilt $a = -1$.

Die Fläche der Parabel $y = -x(x-1) = x - x^2$ oberhalb der x-Achse ist

$$\int_0^1 (x - x^2)dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}.$$

Also ist die Netzfläche $1 - 4 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$.

Aufgabe E2

Peter kauft mehrere Kilo Aprikosen um daraus Dörrobst zu machen.

Eine Aprikose besteht zu 80% aus Wasser.

Die Aprikosen werden so lange getrocknet bis sie nur noch 50% Wasser enthalten.

Bei diesem Dörrprozess verdunstet 12 l Wasser.

Wie viel wogen die Aprikosen vor dem Trocknen?

Lösung

Sei m das ursprüngliche Gewicht der Aprikosen (in kg).

Davon waren $\frac{8}{10}m$ Wasser und $\frac{2}{10}m$ Trockenmasse.

Nach dem Trocknen wogen die Aprikosen $m - 12$ und das verbliebene Wasser war $\frac{8}{10}m - 12$.

Also gilt $\frac{8}{10}m - 12 = (m - 12)\frac{5}{10}$.

Hieraus folgt $m = 20$ (kg).

Aufgabe E3

Wählen Sie in der Multiplikationstabelle zwei Zahlen in der Diagonalen aus (dies sind Quadratzahlen), z.B. 4 und 25, und dann die beiden Zahlen, die in der gleichen Zeile und Spalte stehen, also 10, 10.

·	1	2	3	4	5	6	7
1	1	2	3	4	5	6	7
2	2	4	6	8	10	12	14
3	3	6	9	12	15	18	21
4	4	8	12	16	20	24	28
5	5	10	15	20	25	30	35
6	6	12	18	24	30	36	42
7	7	14	21	28	35	42	49

Addieren Sie die beiden Quadrate, bilden Sie deren Differenz und addieren Sie die beiden anderen Zahlen:

- $a := 25 - 4 = 21$
- $b := 10 + 10 = 20$ und
- $c := 25 + 4 = 29$.

Dann sind a, b und c Pythagoräische Zahlen: $20^2 + 21^2 = 29^2$.

a) Wählen Sie 1 und 36 und berechnen Sie a, b und c.

Gilt auch diesmal $a^2 + b^2 = c^2$?

b) Welche zwei Quadratzahlen aus der Tabelle ergeben das Tripel
(i) $(3, 4, 5)$ (ii) $(5, 12, 13)$ (iii) $(7, 24, 25)$?

c) Welches Tripel a, b, c erhält man mit den Quadratzahlen p^2 und q^2?

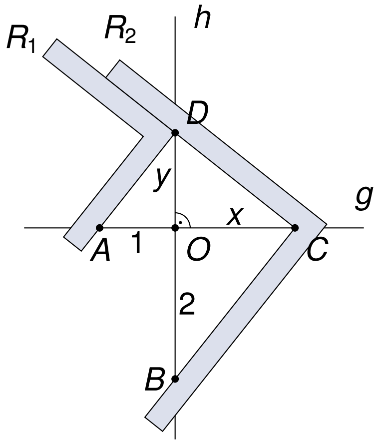
Lösung

a) $a = 36 - 1$, $b = 6 + 6$, $c = 36 + 1$. Es gilt $35^2 + 12^2 = 37^2$.

b) (i) 1, 4 (ii) 4, 9 (iii) 9, 16

c) $a = p^2 - q^2$, $b = 2pq$ und $c = p^2 + q^2$. Es gilt $(p^2 - q^2)^2 + (2pq)^2 = (p^2 + q^2)^2$.

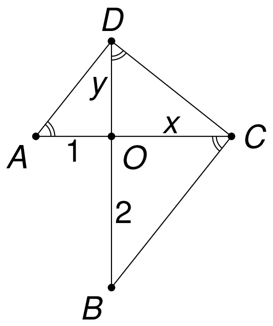
Aufgabe E4



Gegeben sind zwei Geraden g und h, die im Schnittpunkt O senkrecht aufeinander stehen, und zwei Rechtwinkelhaken R_1 und R_2, die so in g und h eingepasst werden, dass $OA = 1$ und $OB = 2$ gilt. Sei $x := OC$ und $y := OD$.

Berechnen Sie x und y.

Lösung



1. Lösung: Die Dreiecke AOD, DOC und COB sind ähnlich. Also gilt

$$\frac{y}{1} = \frac{x}{y} = \frac{2}{x}.$$

Hieraus folgt $x = y^2$, $x \cdot y = 2$ und $2y = x^2$.

Also $x^3 = 4$ und $y^3 = 2$ bzw. $x = \sqrt[3]{4}$ und $y = \sqrt[3]{2}$.

2. Lösung: Der Höhensatz in den rechtwinkligen Dreiecken ACD und DBC ergibt $y^2 = 1 \cdot x$ bzw. $x^2 = y \cdot 2$.

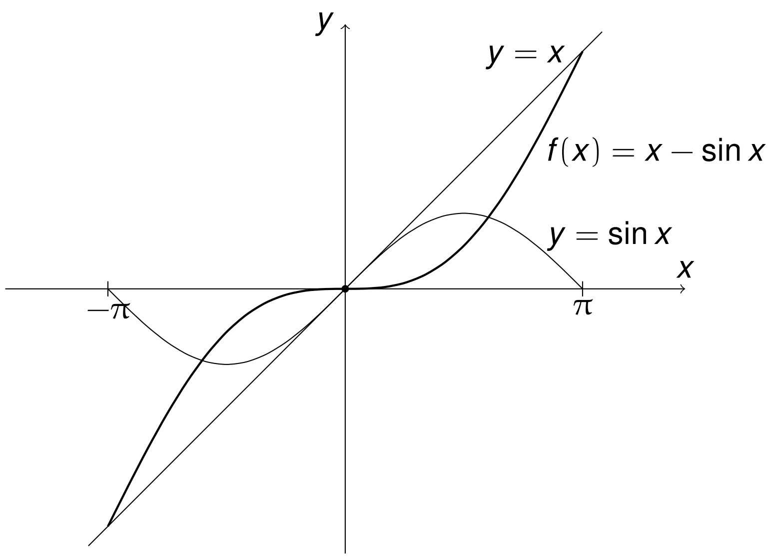
Hieraus folgt $x = \sqrt[3]{4}$ und $y = \sqrt[3]{2}$.

Aufgabe E5

Untersuchen Sie $f(x) = x - \sin x$ für $-\pi < x < \pi$ auf Extremstellen.

Lösung

Aus $f'(x) = 1 - \cos x = 0$ folgt $x = 0$. Da $1 - \cos x > 0$ für $x \neq 0$ und $f''(0) = \sin 0 = 0$, hat f in $(0\,|\,0)$ eine Wendetangente, das heißt es gibt keine Extremstelle.



Aufgabe H1

Gegeben ist die Folge $a_1 = 3$, $a_2 = 5$, $a_{n+2} = a_{n+1} - a_n$, $n \geqslant 1$.

Berechnen Sie a_{2014}.

Lösung

Die ersten acht Folgenglieder sind 3, 5, 2, −3, −5, −2, 3, 5.

Also hat die Folge die Periode 6.

Es gilt $2014 = 335 \cdot 6 + 4$, also ist $a_{2014} = a_4 = -3$.

Aufgabe H2

Im Koordinatensystem sei $F(0\,|\,1)$.

Wo liegen alle Punkte $P(x\,|\,y)$, die von F und der x-Achse den gleichen Abstand haben?

Lösung

Aus

$$y = \sqrt{(y-1)^2 + x^2}$$

folgt

$$y = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2},$$

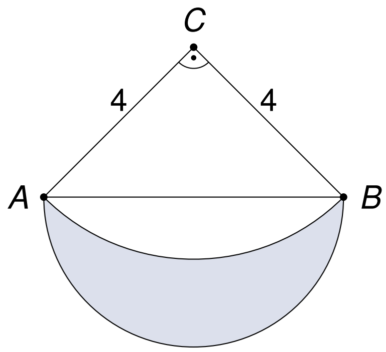
also liegt P auf einer Parabel.

Aufgabe H3

In der Abbildung rechts ist $AC = BC = 4$ und $\sphericalangle ACB = 90°$.

Die eingefärbte Fläche wird begrenzt durch den Halbkreis über AB und den Viertelkreis um C durch A und B.

Wie groß ist die eingefärbte Fläche?



Lösung

$AB = \sqrt{4^2 + 4^2} = 4\sqrt{2}$.

Fläche des Dreiecks ABC: $\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 = 8$.

Fläche des Viertelkreises: $\frac{1}{4} \cdot \pi \cdot 4^2 = 4\pi$.

Fläche des Halbkreises: $\frac{1}{2} \cdot \pi \cdot (\frac{4\sqrt{2}}{2})^2 = 4\pi$.

Eingefärbte Fläche: $4\pi - (4\pi - 8) = 8$.

Aufgabe H4

Seien A und B die Flächen von zwei Dreiecken mit den Seiten $25, 25, 30$ bzw. $25, 25, 40$.

Berechnen Sie $\frac{A}{B}$.

Lösung

Es ist $A = B = 300$. $\frac{A}{B} = 1.$

Aufgabe H5

Wie viele positive ganze Zahlen sind Teiler von 2014?

Hinweis: 53 ist ein Teiler.

Lösung

Es gilt $2014 = 2 \cdot 19 \cdot 53$. Jeder Teiler hat die Form $2^a \cdot 19^b \cdot 53^c$ mit $a, b, c \in \{0, 1\}$. Also gibt es $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ Teiler.

Zentrum für Mathematik · Kinzigstraße 32 · 64625 Bensheim · 06251-7079941
Internet: www.z-f-m.de · Email: tdm@z-f-m.de

Aufgabe H6

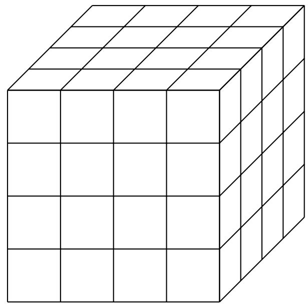
Lösen Sie die Gleichung

$$\sqrt{x+10}+\sqrt[4]{x+10}=12.$$

Lösung

Mit $y := \sqrt[4]{x+10}$ folgt $y^2+y=12$, also $0=y^2+y-12=(y+4)(y-3)$.
Wegen $y>0$ ist $y=3$ und $x=3^4-10=71$.

Aufgabe H7



Die Abbildung zeigt einen großen Würfel, der aus $4^3 = 64$ kleinen Würfeln besteht.

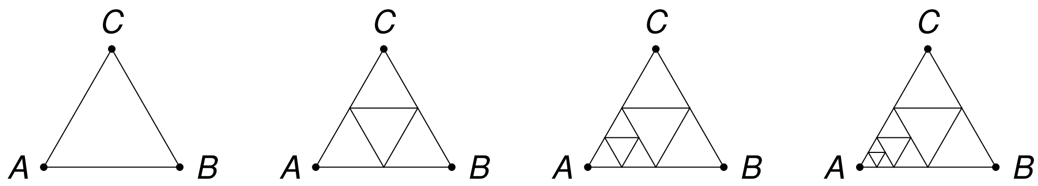
Wie viele dieser kleinen Würfel sind in der Abbildung sichtbar?

Lösung

$4^3 - 3^3 = 64 - 27 = 37.$

Aufgabe H8

Die Abbildungen zeigen eine Folge gleichseitiger Dreiecke ABC, die durch Mittellinien in kleinere Dreiecke unterteilt werden.



Dabei wird immer das Dreieck mit der Ecke A durch seine Mittellinien in vier weitere Dreiecke zerteilt.

Aus wie vielen Dreiecken besteht die 10. Figur?

Hinweis: Die 3. Figur besteht aus sieben Dreiecken.

Lösung

Die ersten vier abgebildeten Figuren bestehen aus 1, $1+3=4$, $1+3+3=7$ und $1+3+3+3=10$ Dreiecken.

Also besteht die 10. Figur aus $1+(10-1)\cdot 3=28$ Dreiecken.

Zentrum für Mathematik · Kinzigstraße 32 · 64625 Bensheim · 06251-7079941
Internet: www.z-f-m.de · Email: tdm@z-f-m.de