

20 Script zur Vorlesung: Lineare Algebra I

Prof. Dr. Salma Kuhlmann

Kapitel 3: § 4 Matrix-Darstellung von linearen Transformationen

Ansatz

Seien V und W zwei K -Vektorräume mit $\dim(V) = n$ und $\dim(W) = m$. Sei $T : V \rightarrow W$ eine lineare Abbildung.

Seien $\mathcal{B} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ eine geordnete Basis für V und $\mathcal{B}' = (\alpha'_1, \dots, \alpha'_m)$ eine geordnete Basis für W .

Definition 20.1.

T ist eindeutig bestimmt durch $T(\alpha_1), \dots, T(\alpha_n) \in W$. Schreibe

$$[T(\alpha_j)]_{\mathcal{B}'} := \begin{pmatrix} A_{1j} \\ \vdots \\ A_{mj} \end{pmatrix} \text{ für } j = 1, \dots, n$$

und setze

$$[T]_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'} := \left(\begin{array}{c|ccc|c} [T(\alpha_1)]_{\mathcal{B}'} & & & & \\ \hline & \cdots & & & \\ \hline & & & & [T(\alpha_n)]_{\mathcal{B}'} \end{array} \right)$$

Diese $m \times n$ -Matrix heißt die *Matrix-Darstellung von T bezüglich der Basen \mathcal{B} und \mathcal{B}'* .

Welche Eigenschaften hat $[T]_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}$?

Satz 20.2.

Es gilt für $\alpha \in V$: $[T(\alpha)]_{\mathcal{B}'} = [T]_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}[\alpha]_{\mathcal{B}}$ (*)

Beweis

Setze $A := [T]_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'} = [A_{ij}]_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$

$$[\alpha]_{\mathcal{B}} := \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Nun ist $[T(\alpha_j)]_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} A_{1j} \\ \vdots \\ A_{mj} \end{pmatrix}$. Also ist $T(\alpha_j) = \sum_{i=1}^m A_{ij} \alpha'_i$.

Berechne nun:

$$T(\alpha) = T\left(\sum_{j=1}^n x_j \alpha_j\right) = \sum_{j=1}^n x_j T(\alpha_j) = \sum_{j=1}^n x_j \sum_{i=1}^m A_{ij} \alpha'_i = \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n A_{ij} x_j\right) \alpha'_i.$$

$$\text{Es folgt: } [T(\alpha)]_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n A_{1j} x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n A_{mj} x_j \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}. \quad \square$$

Behauptung 20.3.

(*) bestimmt die Matrix $[T]_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}$ eindeutig!

Satz 20.5.

Die Abbildung

$$\begin{aligned} \rho : L(V, W) &\rightarrow K^{m \times n} \\ T &\mapsto [T]_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'} \end{aligned}$$

ist eine Isomorphie von K -Vektorräumen.

Beweis

Ist ρ linear?

Berechne

$$\rho(cT_1 + T_2) = [cT_1 + T_2]_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'} = ([(cT_1 + T_2)(\alpha_1)]_{\mathcal{B}'} \mid \cdots \mid [(cT_1 + T_2)(\alpha_n)]_{\mathcal{B}'}) = ?$$

Nun haben wir

j -te Spalte von $\rho(cT_1 + T_2)$

$$\underbrace{[(cT_1 + T_2)(\alpha_j)]_{\mathcal{B}'}}_{j\text{-te Spalte von } \rho(cT_1 + T_2)} = [cT_1(\alpha_j) + T_2(\alpha_j)]_{\mathcal{B}'} =$$

$$\underbrace{c[T_1(\alpha_j)]_{\mathcal{B}'}}_{j\text{-te Spalte von } \rho(T_1)} + \underbrace{[T_2(\alpha_j)]_{\mathcal{B}'}}_{j\text{-te Spalte von } \rho(T_2)}$$

Also: Die j -te Spalte von $\rho(cT_1 + T_2)$ ist gleich wie die j -te Spalte von $\rho(T_2)$ plus c -mal die j -te Spalte von $\rho(T_1)$. Also

$$\rho(cT_1 + T_2) = c\rho(T_1) + \rho(T_2).$$

Ist ρ injektiv?

Sei $T \in L(V, W)$ mit $\rho(T) = 0_{m \times n}$.

$$\text{Dann ist } [T(\alpha_j)]_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \text{ f\"ur alle } j = 1, \dots, n.$$

Aber dann ist $T(\alpha_j) = 0$ f\"ur alle $j = 1, \dots, n$. Also ist T identisch mit der Nullabbildung. Daraus folgt auch, dass ρ surjektiv ist, weil $mn = \dim L(V, W) = \dim K^{m \times n}$ (siehe ÜB). \square

Sonderfall

Wir betrachten $T : V \rightarrow V$ ist ein linearer Operator und $\mathcal{B} = \mathcal{B}'$.

Definition 20.6. und Bezeichnung

Schreibe $[T]_{\mathcal{B},\mathcal{B}} := [T]_{\mathcal{B}}$ ist die *Matrixdarstellung des Operators in der Basis* \mathcal{B} . Hier gilt also die folgende Version von (*):

$$[T(\alpha)]_{\mathcal{B}} = [T]_{\mathcal{B}}[\alpha]_{\mathcal{B}}.$$

Nun betrachten wir die Matrixdarstellung von Hintereinanderausführungen

$$V \xrightarrow{T} W \xrightarrow{U} Z \text{ und } V \xrightarrow{U \circ T} Z$$

Ansatz:

V, W, Z sind endlich dim K -Vektorräume. T, U sind lineare Abbildungen.

$\mathcal{B} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ ist eine Basis für V

$\mathcal{B}' = (\beta_1, \dots, \beta_m)$ ist eine Basis für W

$\mathcal{B}'' = (\gamma_1, \dots, \gamma_p)$ ist eine Basis für Z

Setze $A = [T]_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$, $B = [U]_{\mathcal{B}',\mathcal{B}''}$ und $C = [U \circ T]_{\mathcal{B},\mathcal{B}''} = ?$

Satz 20.7.

$C = BA$.

Beweis

$$[T(\alpha)]_{\mathcal{B}'} \stackrel{(*)}{=} A[\alpha]_{\mathcal{B}} \text{ und } [U(T(\alpha))]_{\mathcal{B}''} \stackrel{(*)}{=} B[T(\alpha)]_{\mathcal{B}'}$$

Also $[(U \circ T)(\alpha)]_{\mathcal{B}''} = BA[\alpha]_{\mathcal{B}}$. (*) erfüllt also die Matrix BA bezüglich $U \circ T$. Die Eindeutigkeit impliziert nun unsere Behauptung. \square