

19 Script zur Vorlesung: Lineare Algebra I

Prof. Dr. Salma Kuhlmann

Definition 19.1.

Sei $T : V \rightarrow W$ eine Abbildung. T ist invertierbar, wenn es eine Abbildung U gibt mit $U : W \rightarrow V$ und $U \circ T = Id_V$ und $T \circ U = Id_W$, wobei Id die Identitätsabbildung bezeichnet: $Id(x) = x$ für alle x .

Lemma 19.2.

T ist invertierbar $\Leftrightarrow T$ ist bijektiv.

Beweis

“ \Rightarrow ”

$$(1) \quad T(x_1) = T(x_2) \Rightarrow x_1 = (U \circ T)(x_1) = U(T(x_1)) = U(T(x_2)) \\ = (U \circ T)(x_2) = x_2, \text{ also ist } T \text{ injektiv.}$$

$$(2) \quad (T \circ U)(y) = y, \text{ also } y = T(U(y)) \text{ für alle } y \in W, \text{ also ist } T \text{ surjektiv.}$$

“ \Leftarrow ”

T bijektiv \Leftrightarrow für alle $y \in W$ existiert genau ein $x \in V$ mit $T(x) = y$. Setze $U(y) := x$. Also wird $U : W \rightarrow V$ eindeutig definiert durch $U(y) = x \Leftrightarrow T(x) = y$.

Berechne $U(T(x)) = ?$. Setze $y := T(x)$. Also $U(T(x)) = x$.

Analog $T(U(y)) = y$. Also $U \circ T = Id_V$ und $T \circ U = Id_W$. □

Bezeichnung 19.3.

T ist invertierbar $\Rightarrow U$ ist eindeutig definiert. Schreibe $U := T^{-1}$. Also $T^{-1}(y) = x \Leftrightarrow y = T(x)$.

Satz 19.4.

T ist linear und invertierbar $\Rightarrow T^{-1}$ ist linear und invertierbar.

Beweis

$$T^{-1}(\underbrace{c\beta_1 + \beta_2}_{:=Y}) \stackrel{?}{=} \underbrace{cT^{-1}(\beta_1) + T^{-1}(\beta_2)}_{:=X}$$

$T^{-1}(Y) = X \Leftrightarrow T(X) = Y$. Also berechne $T(X) = T(cT^{-1}(\beta_1) + T^{-1}(\beta_2)) \\ = cT(T^{-1}(\beta_1)) + T(T^{-1}(\beta_2)) = c\beta_1 + \beta_2$. □

Satz 19.5.

Es seien $V \xrightarrow{G} W \xrightarrow{L} Z$ invertierbare Abbildungen. Dann ist $L \circ G : V \rightarrow Z$ invertierbar und $(L \circ G)^{-1} = G^{-1} \circ L^{-1}$.

Beweis

$(G^{-1} \circ L^{-1}) \circ (L \circ G) = G^{-1} \circ (L^{-1} \circ L) \circ G = G^{-1} \circ I \circ G = G^{-1} \circ G = I$. Andere: Analog. \square

Definition 19.6. und Bezeichnung

Sei V ein K -VR. $GL_K(V) := \{T \mid T : V \rightarrow V \text{ invertierbare lineare Abbildung}\}$.

Bemerkung 19.7.

Wir haben gerade gezeigt, dass $GL_K(V)$ mit der Verknüpfung \circ eine Gruppe ist. $GL_K(V)$ ist die *allgemeine lineare Gruppe* (general linear group).

Satz 19.9.

$T : V \rightarrow W$ ist injektiv $\Leftrightarrow T$ bildet eine linear unabhängige Teilmenge von V auf eine linear unabhängige Teilmenge von W .

Beweis

“ \Rightarrow ”

Sei $\ker(T) = \{0\}$ (siehe Lemma 14.5) und $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ linear unabhängig in V . Zu zeigen: $T(\alpha_1), \dots, T(\alpha_k)$ linear unabhängig.

Sei $c_1T(\alpha_1) + \dots + c_kT(\alpha_k) = 0$. Also $T(c_1\alpha_1 + \dots + c_k\alpha_k) = 0$. Also $c_1\alpha_1 + \dots + c_k\alpha_k \in \ker(T)$. Also $c_1\alpha_1 + \dots + c_k\alpha_k = 0$; $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ linear unabhängig $\Rightarrow c_1 = \dots = c_k = 0$. \square

Korollar 19.10.

Sei $\dim(V) = \dim(W) = d$ und $T : V \rightarrow W$ eine lineare Abbildung. Es gilt T ist injektiv $\Leftrightarrow T$ ist surjektiv.

Beweis

Wir wenden den Dimensionssatz (Satz 18.2) an.

$d = \text{rang}(T) + \dim \ker(T)$. Also T injektiv $\Leftrightarrow \ker(T) = \{0\} \Leftrightarrow$

$\dim \ker(T) = 0 \Leftrightarrow \text{rang}(T) = d \Leftrightarrow \dim R_T = d \Leftrightarrow R_T = W \Leftrightarrow T$ surjektiv. \square