

14 Script zur Vorlesung: Lineare Algebra I

Prof. Dr. Salma Kuhlmann

Kapitel 2: § 4 Koordinaten

Definition 14.1.

Sei V endlich dim. K -Vektorraum; $\dim V = n$.

Eine *geordnete Basis* ist ein n -Tupel $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$; $\alpha_i \in V$, so dass $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ eine Basis ist.

Notation und Terminologie

Wir schreiben auch $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ ist eine geordnete Basis. (Wir werden nicht immer $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ schreiben.)

Lemma 14.2.

Sei V ein endlich dim. K -Vektorraum und sei $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ eine geordnete Basis; sei $\alpha \in V$, dann existiert ein eindeutiges n -Tupel $(x_1, \dots, x_n) \in K^n$ mit $\alpha = \sum_{i=1}^n x_i \alpha_i$.

Beweis

$$\alpha = \sum z_i \alpha_i \Rightarrow \sum_{i=1}^n (x_i - z_i) \alpha_i = 0 \Rightarrow x_i - z_i = 0 \Rightarrow x_i = z_i, \text{ für alle } 1 \leq i \leq n. \quad \square$$

Definition 14.3.

(1) x_i ist die i -te Koordinate von α bezüglich \mathcal{B} .

(2) (x_1, \dots, x_n) ist das Koordinaten-Tupel von α bezüglich \mathcal{B} .

Definition 14.4.

V, W sind K -Vektorräume.

(1) $T : V \rightarrow W$ ist eine *lineare Abbildung* (oder *Transformation*), falls

(a) $T(\alpha + \beta) = T(\alpha) + T(\beta)$

(b) $T(c\alpha) = cT(\alpha)$;

$\alpha, \beta \in V; c \in K$;

(a) und (b) sind äquivalent zu: $\forall \alpha, \beta \in V, \forall c \in K$

(c) $T(c\alpha + \beta) = cT(\alpha) + T(\beta)$

Bemerkung

$$\left. \begin{array}{l} T(0) = T(0+0) \\ T(0) = T(0)+T(0) \end{array} \right\} \Rightarrow T(0) = 0.$$

(2) T ist eine *Isomorphie* oder ein *Isomorphismus*, falls T ferner bijektiv ist.

Notation

$$V \stackrel{T}{\simeq} W \text{ oder } V \simeq W$$

Terminologie

V und W sind isomorph.

Lemma 14.5.

Sei T eine lineare Transformation. Dann ist T injektiv genau dann, wenn $\forall \alpha (T(\alpha) = 0 \Rightarrow \alpha = 0)$.

Beweis

“ \Rightarrow ” T ist injektiv und $T(\alpha) = 0 = T(0)$. Also $\alpha = 0$.

“ \Leftarrow ” Sei $T(\alpha_1) = T(\alpha_2)$, dann $T(\alpha_1) - T(\alpha_2) = 0$, i.e. $T(\alpha_1 - \alpha_2) = 0$.
Also $\alpha_1 - \alpha_2 = 0$ und $\alpha_1 = \alpha_2$. □

Satz 14.6.

Sei V ein K -Vektorraum, $\dim V = n \Rightarrow V \simeq K^n$.

Beweis

Sei $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ eine geordnete Basis. Definiere $T : V \rightarrow K^n$

$$\alpha \mapsto \underbrace{(x_1, \dots, x_n)}$$

:= Koordinaten-Tupel von α bezüglich \mathcal{B} .

$$\bullet T(\alpha + \beta) \stackrel{?}{=} T(\alpha) + T(\beta).$$

Sei $\alpha = \sum x_i \alpha_i, \beta = \sum y_i \alpha_i, \alpha + \beta = \sum (x_i + y_i) \alpha_i$ eindeutig $\Rightarrow T(\alpha + \beta) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n) = (x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = T(\alpha) + T(\beta)$.

$$\bullet \text{Analog } T(c\alpha) = cT(\alpha).$$

$$\bullet T(\alpha) = (0, \dots, 0) \Rightarrow \alpha = 0, \text{ weil } x_1 = \dots = x_n = 0.$$

So T injektiv.

Sei $(x_1, \dots, x_n) \in K^n$. Setze $\alpha := \sum x_i \alpha_i \in V$. Es gilt $T(\alpha) = (x_1, \dots, x_n)$.

So T surjektiv. □

Notation

Koordinaten Spaltenmatrix von α bezüglich \mathcal{B} :

$$[\alpha]_{\mathcal{B}} := \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$