21 Script zur Vorlesung: Lineare Algebra I

Prof. Dr. Salma Kuhlmann

Kapitel 3: § 4 Matrix-Darstellung von linearen Transformationen

Ansatz
Wie in Vorlesung 20: V ist endlich-dimensional mit Dimension n; $\mathcal{B}$ ist eine geordnete Basis für V.

Korollar 21.1.
$\rho : L(V, V) \to K^{n\times n}$. $\rho(T) := [T]_{\mathcal{B}}$ ist ein K-Algebren Isomorphismus.

Beweis
ρ ist ein K-Vektorraum-Isomorphismus. Ferner gilt $\rho(T_1 \circ T_2) = \rho(T_1)\rho(T_2)$. □

Korollar 21.2.
Sei $T \in L(V, V)$. Es gilt: T ist invertierbar genau dann, wenn $[T]_{\mathcal{B}}$ invertierbar ist. In diesem Fall gilt ferner $[T^{-1}]_{\mathcal{B}} = [T]_{\mathcal{B}}^{-1}$.

Beweis
T ist invertierbar $\Leftrightarrow$ es existiert T^{-1} mit $T \circ T^{-1} = T^{-1} \circ T = Id$

$\Leftrightarrow [T \circ T^{-1}]_{\mathcal{B}} = [T^{-1} \circ T]_{\mathcal{B}} = [Id]_{\mathcal{B}}$

$\Leftrightarrow [T]_{\mathcal{B}}[T^{-1}]_{\mathcal{B}} = [T^{-1}]_{\mathcal{B}}[T]_{\mathcal{B}} = I_n$

$\Leftrightarrow [T]_{\mathcal{B}}^{-1} = [T^{-1}]_{\mathcal{B}}$. □

Ansatz
V endlich dim. $\mathcal{B} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ und $\mathcal{B}' = (\alpha'_1, \ldots, \alpha'_n)$ sind zwei geordnete Basen für V. $T \in L(V, V)$.

Fragestellung
Was ist die Beziehung zwischen $[T]_{\mathcal{B}}$ und $[T]_{\mathcal{B}'}$?

Lösung
Satz 15.3 liefert eine invertierbare P, so dass für alle $\alpha \in V$ gilt
$[\alpha]_{\mathcal{B}} = P[\alpha]_{\mathcal{B}'}$ $(**)$
Und Satz 20.2 liefert eine eindeutige Matrix $[T]_{\mathcal{B}}$ so, dass für alle $\alpha \in V$:
$[T(\alpha)]_{\mathcal{B}} = [T]_{\mathcal{B}}[\alpha]_{\mathcal{B}}$ $(*)$.
Nun gilt $(**)$ für $T(\alpha) \in V$: $[T(\alpha)]_{\mathcal{B}} = P[T(\alpha)]_{\mathcal{B}'}$ $(***)$
$(*), (**)$ und $(***)$ liefern

$$[T]_{\mathcal{B}}P[\alpha]_{\mathcal{B}'} = P[T(\alpha)]_{\mathcal{B}'} \qquad \text{oder} \qquad (P^{-1}[T]_{\mathcal{B}}P)[\alpha]_{\mathcal{B}'} = [T(\alpha)]_{\mathcal{B}'}.$$

Also erfüllt $(P^{-1}[T]_{\mathcal{B}}P)$ die bestimmende matrizielle Gleichung $(*)$ bezüglich der Basis $\mathcal{B}'$. Die Eindeutigkeit von $[T]_{\mathcal{B}'}$ für die Erfüllung der $(*)$ liefert nun

$$[T]_{\mathcal{B}'} = P^{-1}[T]_{\mathcal{B}}P, \text{ wobei } P = \left(\begin{array}{c|c|c} [\alpha'_1]_{\mathcal{B}} & \cdots & [\alpha'_n]_{\mathcal{B}} \end{array} \right).$$

Bemerkung 21.3.
Betrachte die Abbildung $\pi : V \to V$. Diese lineare Abbildung ist eindeutig definiert durch die Angaben $\pi(\alpha_j) := \alpha'_j$ für alle $j = 1, \ldots, n$. Dieser Operator ist invertierbar, da er eine *Basis auf eine Basis abbildet* (Korollar 19.10 zu Satz 19.9). Somit ist die Matrix-Darstellung $[\pi]_{\mathcal{B}}$ invertierbar. Es ist

$[\pi]_{\mathcal{B}} = \big([\pi(\alpha_1)]_{\mathcal{B}} \mid \cdots \mid [\pi(\alpha_n)]_{\mathcal{B}}\big) = \big([\alpha'_1]_{\mathcal{B}} \mid \cdots \mid [\alpha'_n]_{\mathcal{B}}\big) = P.$

P heißt deshalb *Matrix der Basiswechsel.*

Wir haben bewiesen:

Satz 21.4.
(Ansatz wie oben)
$[T]_{\mathcal{B}'} = [\pi]_{\mathcal{B}}^{-1}[T]_{\mathcal{B}}[\pi]_{\mathcal{B}}$ oder $[T]_{\mathcal{B}'} = P^{-1}[T]_{\mathcal{B}}P.$

Definition 21.5.
Seien $A, B \in K^{n \times n}$. wir sagen B ist zu A *ähnlich*, falls es eine invertierbare $P \in K^{n \times n}$ gibt, so dass $B = P^{-1}AP$.

Wir haben in Satz 21.4 bewiesen:
Sind $B = [T]_{\mathcal{B}'}$ und $A = [T]_{\mathcal{B}}$ die Matrix-Darstellungen des Operators T bezüglich der Basen $\mathcal{B}'$ bzw. $\mathcal{B}$, dann ist B zu A ähnlich. Tatsächlich gilt auch die Umkehrung!

Satz 21.6.
B ist ähnlich zu A genau dann, wenn B und A denselben linearen Operator (begzüglich geeigneter Basen) darstellen.

Beweis

"$\Leftarrow$" Bereits gemacht.

"$\Rightarrow$" Sei nun $\mathcal{B}$ eine beliebige Basis. Sei T der eindeutig durch $[T]_{\mathcal{B}} = A$, d.h. $[T(\alpha)]_{\mathcal{B}} := A[\alpha]_{\mathcal{B}}$ definierte Operator. (∗)

Sei ferner P eine invertierbare Matrix so, dass $B = P^{-1}AP$. Sei $\mathcal{B}'$ die Basis, erhalten von $\underline{P}$, d.h. wofür

$$\underline{P} = \left(\begin{array}{c|c|c} [\alpha_1']_{\mathcal{B}} & \cdots & [\alpha_n']_{\mathcal{B}} \end{array} \right)$$

sein sollte. Diese Angabe bestimmt also, dass

$$[\alpha_j']_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} P_{1j} \\ \vdots \\ P_{nj} \end{pmatrix}, \text{ d.h. } \alpha_j' := \sum_{i=1}^{n} P_{ij}\alpha_i.$$

Behauptung: Es gilt $[T]_{\mathcal{B}'} = B$. (ÜA, siehe ÜB). □

Exkurs

Definition: Sei $R \subseteq S \times S$ eine Relation.
Schreibe $xRy \Leftrightarrow (x, y) \in R$. R heißt Äquivalenzrelation, falls:

(1) xRx für alle $x \in S$ (Reflexivität);

(2) $xRy \Rightarrow yRx$ für alle $x, y \in S$ (Symmetrie);

(3) $xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz$ für alle $x, y, z \in S$ (Transitivität).

Satz 21.7.
B ähnlich A ist eine Äquivalenzrelation auf $K^{n\times n}$:

(1) $B = I_n^{-1}BI_n$

(2) $B = P^{-1}AP \Rightarrow A = PBP^{-1} = (P^{-1})^{-1}B(P^{-1})$
Setze $Q := P^{-1}$. Also $A = Q^{-1}BQ$

(3) $\left.\begin{array}{l} B = P^{-1}AP \\ C = Q^{-1}BQ \end{array}\right\} \Rightarrow C = (PQ)^{-1}A(PQ)$

Mehr dazu im Übungsblatt.