Tag der Mathematik 2019

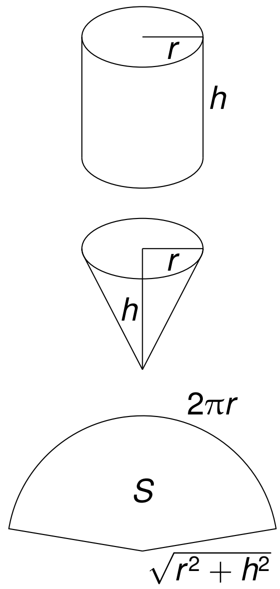
Gruppenwettbewerb
Einzelwettbewerb
Mathematische Hürden

Aufgaben mit Lösungen

Aufgabe G1

a) Für eine Konservendose mit einem Liter Inhalt soll möglichst wenig Material benötigt werden, d.h. gesucht ist ein Zylinder mit einem Volumen V_0, der eine möglichst kleine Oberfläche S hat.
Berechnen Sie das Verhältnis der Höhe h zum Radius r bei minimaler Oberfläche.

b) Berechnen Sie entsprechend $\frac{h}{r}$ bei einem Kelchglas, d.h. gesucht ist ein Kegel mit dem Volumen V_0, der eine möglichst kleine Mantelfläche S hat.



Lösung

a) Aus $V_0 = \pi r^2 h$ folgt $h = \frac{V_0}{\pi r^2}$ und somit

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi r h = 2\pi r^2 + \frac{2V_0}{r}.$$

Aus $S' = 4\pi r - \frac{2V_0}{r^2} = 0$ folgt $V_0 = 2\pi r^3$.
Aus $V_0 = \pi r^2 h = 2\pi r^3$ folgt $\frac{h}{r} = 2$.

b) Aus $V_0 = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ folgt $h = \frac{3V_0}{\pi} \cdot \frac{1}{r^2}$ und somit

$$S = \frac{1}{2} \cdot 2\pi r \cdot \sqrt{r^2 + h^2} = \sqrt{\pi^2 r^4 + \frac{9V_0^2}{r^2}}.$$

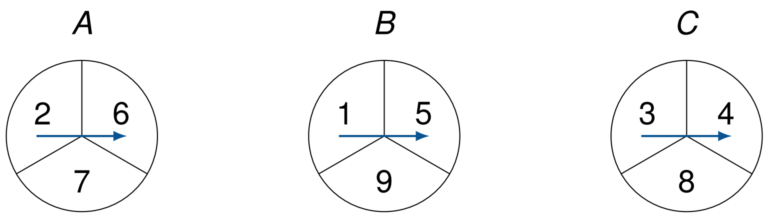
Aus

$$S' = \frac{4\pi^2 r^3 - \frac{18V_0^2}{r^3}}{2\sqrt{\pi^2 r^4 + \frac{9V_0^2}{r^2}}} = 0$$

folgt $r^6 = \frac{9V_0^2}{2\pi^2}$ und $r^3 = \frac{3V_0}{\pi\sqrt{2}} = \frac{hr^2}{\sqrt{2}}$.
Somit ist $\frac{h}{r} = \sqrt{2}$.

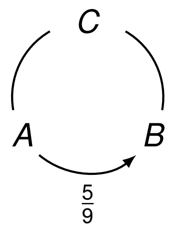
Aufgabe G2

Beim Drehen der folgenden „Glücksräder“ erscheint jeder Sektor mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{3}$.



a) Wählen Sie jeweils zwei Glücksräder aus und berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, mit der eines gewinnt.

Vergleicht man z.B. A mit B, so gewinnt 2 einmal, 6 und 7 je zweimal, d.h. in 5 von 9 Fällen gewinnt A.
Vergleichen Sie entsprechend B mit C und C mit A.
Berechnen Sie die Gewinnwahrscheinlichkeiten bei diesem paarweisen Vergleich und tragen Sie diese in das Pfeildiagramm ein.



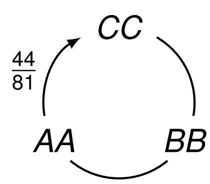
b) Berechnen Sie die Gewinnwahrscheinlichkeiten, wenn jedes Glücksrad zweimal gedreht wird.

Vergleicht man zum Beispiel

AA	4	8	9	12	13	14
Wahrscheinlichkeit	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$

mit

CC	6	7	8	11	12	16
Wahrscheinlichkeit	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$



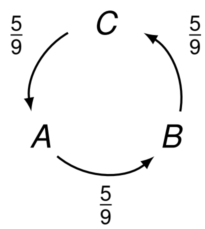
so gewinnt AA gegen CC mit der Wahrscheinlichkeit

$$\tfrac{2}{9}\left(\tfrac{1}{9}+\tfrac{2}{9}\right)+\tfrac{2}{9}\left(\tfrac{1}{9}+\tfrac{2}{9}+\tfrac{1}{9}\right)+\tfrac{1}{9}\left(\tfrac{1}{9}+\tfrac{2}{9}+\tfrac{1}{9}+\tfrac{2}{9}\right)+\tfrac{2}{9}\left(1-\tfrac{1}{9}\right)+\tfrac{1}{9}\left(1-\tfrac{1}{9}\right)=\tfrac{44}{81}$$

(Unentschieden gab es bei $(8{,}8)$ und $(12{,}12)$).
Vergleichen Sie entsprechend CC mit BB und BB mit AA.
Berechnen Sie jeweils die Gewinnwahrscheinlichkeiten und tragen diese in das Pfeildiagramm ein.

Lösung

a) Vergleicht man B mit C, so gewinnt 1 keinmal, 5 zweimal und 9 dreimal, d.h. in 5 von 9 Fällen gewinnt B.
Beim Vergleich von C mit A, gewinnen 3 und 4 jeweils einmal und 8 dreimal, d.h. in 5 von 9 Fällen gewinnt C.



b) Für BB ergibt sich

BB	2	6	10	14	18
Wahrscheinlichkeit	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{3}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$

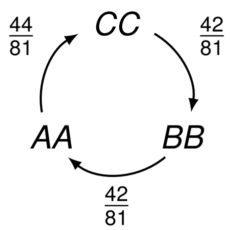
Vergleicht man CC mit BB, so ist die Gewinnwahrscheinlichkeit von CC

$$\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{9}+\frac{2}{9}\left(\frac{1}{9}+\frac{2}{9}\right)+\frac{1}{9}\left(\frac{1}{9}+\frac{2}{9}\right)+\frac{2}{9}\left(\frac{1}{9}+\frac{2}{9}+\frac{3}{9}\right)+\frac{2}{9}\left(\frac{1}{9}+\frac{2}{9}+\frac{3}{9}\right)+\frac{1}{9}\left(1-\frac{1}{9}\right)=\frac{42}{81}.$$

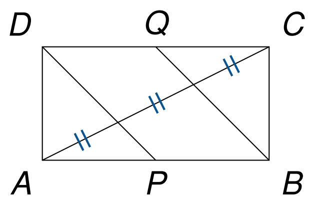
Der Vergleich von BB mit AA ergibt die Gewinnwahrscheinlichkeit von BB

$$\frac{2}{9}\cdot\frac{1}{9}+\frac{3}{9}\left(\frac{1}{9}+\frac{2}{9}+\frac{2}{9}\right)+\frac{2}{9}\left(1-\frac{1}{9}\right)+\frac{1}{9}\cdot 1=\frac{42}{81}.$$

Insgesamt ergibt sich also

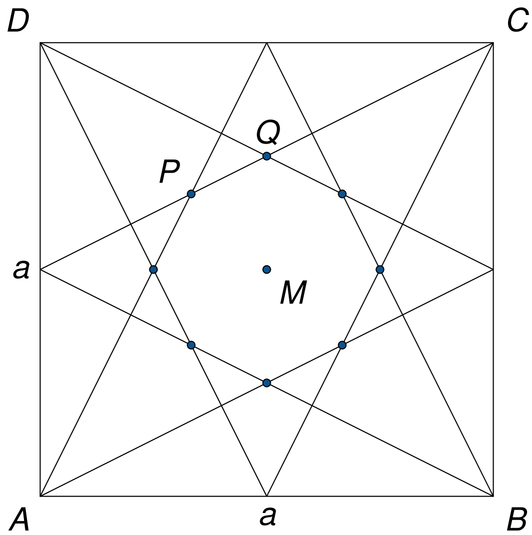


Aufgabe G3



a) Zeigen Sie: In einem Rechteck (Seitenlängen a und b) mit den Seitenmitten P und Q wird die Diagonale AC durch DP und BQ in gleichlange Teistücke zerlegt.

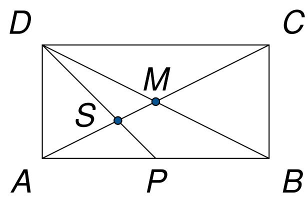
b) In einem Quadrat $ABCD$ mit Seitenlänge a und Mittelpunkt M werden die vier Ecken mit den Mittelpunkten der gegenüberliegenden Seiten verbunden.



Dadurch entsteht ein „Stern“ und ein Achteck mit Mittelpunkt M. Seien P und Q zwei benachbarte Ecken dieses Achtecks. Berechnen Sie MP, MQ und die Fläche F des Achtecks.

Lösung

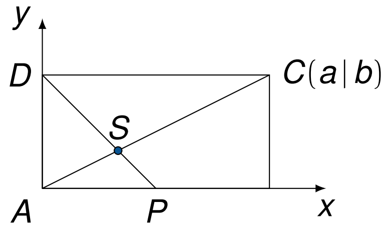
a) *1. Lösung:*
Im Dreieck ABD sind DP und AM Seitenhalbierende. Für den Schnittpunkt S gilt $AS = 2 \cdot SM$. (Analoge Betrachtung von Dreieck BCD mit $BCD \cong ABD$.)



2. Lösung:
Im Koordinatensystem liegen AC und DP auf den Geraden

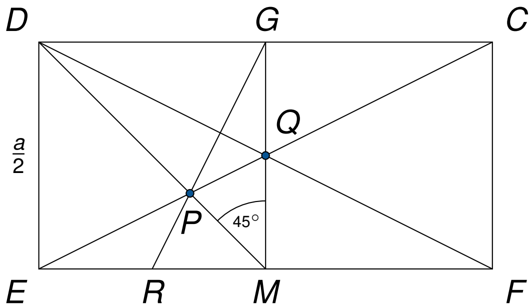
$$y = \frac{b}{a}x \quad \text{bzw.} \quad y = -\frac{2b}{a}x + b.$$

Diese schneiden sich in $S(\frac{a}{3} \,|\, \frac{b}{3})$.



b) $MQ = \frac{1}{2}MG = \frac{a}{4}$.
Im Dreieck DEF ist P der Schnittpunkt der Seitenhalbierenden MD und EQ. Also gilt (vgl. a))

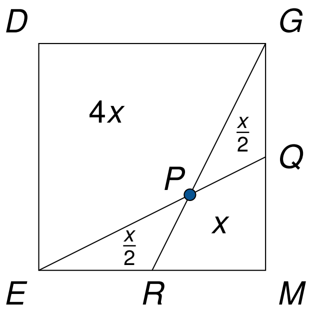
$$MP = \frac{1}{3}MD = \frac{1}{3} \cdot \frac{a}{2}\sqrt{2} = \frac{a\sqrt{2}}{6}.$$



1. Lösung:

$$F = 8 \cdot \frac{1}{2} MQ \cdot MP \cdot \sin 45^\circ = 8 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{4} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{6} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{a^2}{6}.$$

2. Lösung:
Die Vierecke $MQPR$ und $DEPG$ sind ähnlich (Streckfaktor -2, Streckzentrum P).
Aus $6x = \frac{a^2}{4}$ folgt $F = 4x = \frac{a^2}{6}$.

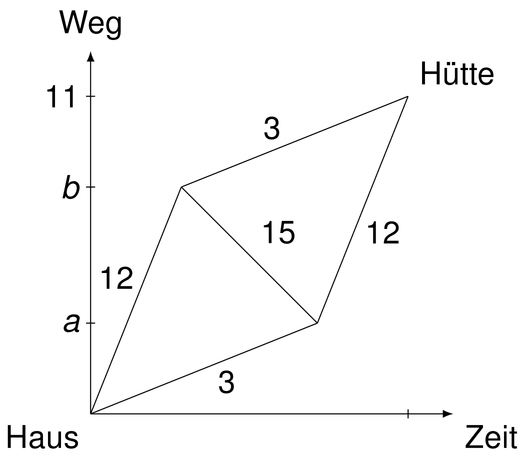


Aufgabe G4

Axel, Bert und Carl wollen von ihrem Haus zu einer 11km entfernten Hütte gelangen.
Sie haben nur ein Fahrrad mit Gepäckträger.
Axel fährt mit dem Fahrrad, die beiden anderen gehen oder sitzen auf dem Gepäckträger.
Fährt Axel allein mit dem Fahrrad, kann er 15km/h schnell fahren.
Sitzt jemand auf dem Gepäckträger, kann er nur 12km/h schnell fahren.
Zu Fuß gehen sie mit einer Geschwindigkeit von 3km/h.
Während Carl zunächst zu Fuß geht, fährt Axel mit Bert auf dem Gepäckträger vom Haus bis zu einer Stelle, wo er ihn ablädt und dieser dann zu Fuß weitergeht.
Anschließend fährt Axel allein zurück bis er auf Carl trifft.
Carl setzt sich auf den Gepäckträger und beide fahren zusammen zur Hütte.
Alle drei kommen gleichzeitig an der Hütte an.
Wie lange brauchen sie zur Hütte?

Lösung

Im Weg-Zeit-Diagramm sind die Geschwindigkeiten eingetragen und die Entfernungen a und b von der Hütte, wo die Wechsel stattfinden. Für die Zeiten gilt



$$T_{\text{Carl}} = \frac{a}{3} + \frac{11-a}{12}$$
$$T_{\text{Bert}} = \frac{b}{12} + \frac{11-b}{3}$$
$$T_{\text{Axel}} = \frac{b}{12} + \frac{b-a}{15} + \frac{11-a}{12}$$

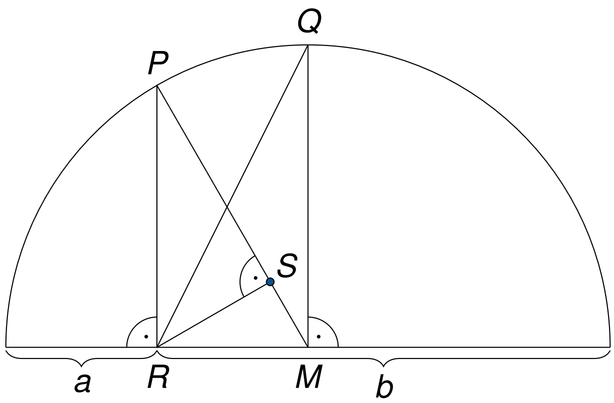
Aus $T_{\text{Carl}} = T_{\text{Bert}}$ folgt $a+b=11$.

Aus $T_{\text{Axel}} = T_{\text{Carl}}$ folgt $8a = 3b$.

Also ist $a=3$, $b=8$ und die benötigte Zeit $\frac{a}{3} + \frac{11-a}{12} = \frac{3}{3} + \frac{11-3}{12} = \frac{5}{3}$ Stunden bzw. 100 Minuten.

Aufgabe E1

Seien a und b, $a < b$, positive reelle Zahlen. In einem Halbkreis mit Durchmesser $a+b$ und Mittelpunkt M sind die Punkte P,Q,R und S eingezeichnet.



Berechnen Sie MR, RQ, MP, PR und PS.
Aus der Zeichnung ergibt sich folgende Ungleichung:

$$RQ > MP > PR > PS.$$

Welche Ungleichung ergibt sich daraus für a und b?

Lösung

$$MR = \frac{a+b}{2} - a = \frac{b-a}{2}$$

$$RQ = \sqrt{MQ^2 + MR^2} = \sqrt{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + \left(\frac{b-a}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$$

$$MP = \frac{a+b}{2}$$

$$PR = \sqrt{ab}$$

Aus $PR^2 = PS \cdot MP$ folgt $PS = \frac{PR^2}{MP} = \frac{2ab}{a+b} = \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$.
Hieraus folgt für $a < b$ die Ungleichung

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} > \frac{a+b}{2} > \sqrt{ab} > \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}.$$

Zentrum für Mathematik · Werrastraße 26 · 64625 Bensheim · 06251-580306
Internet: www.z-f-m.de · Email: tdm@z-f-m.de

Aufgabe E2

Eine Großmutter sagt:

> „Meine Tochter und mein Enkelkind werden im Jahr 2019 so alt wie die Quersumme ihres Geburtsjahres.“

Wie alt sind die beiden?

Lösung

Das Geburtsjahr liegt entweder vor 2000 (i) oder nach 1999 (ii).

(i) Aus $19bc + 1 + 9 + b + c = 2019$ folgt

$$10b + c + 10 + b + c = 119$$

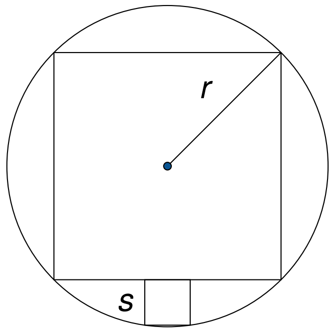
und somit $11b + 2c = 109$.
Also ist $b = 9$ und $c = 5$, d.h. die Tochter wurde 1995 geboren und ist 24 Jahre alt.

(ii) Aus $2abc + 2 + a + b + c = 2019$ folgt

$$100a + 10b + c + 2 + a + b + c = 19$$

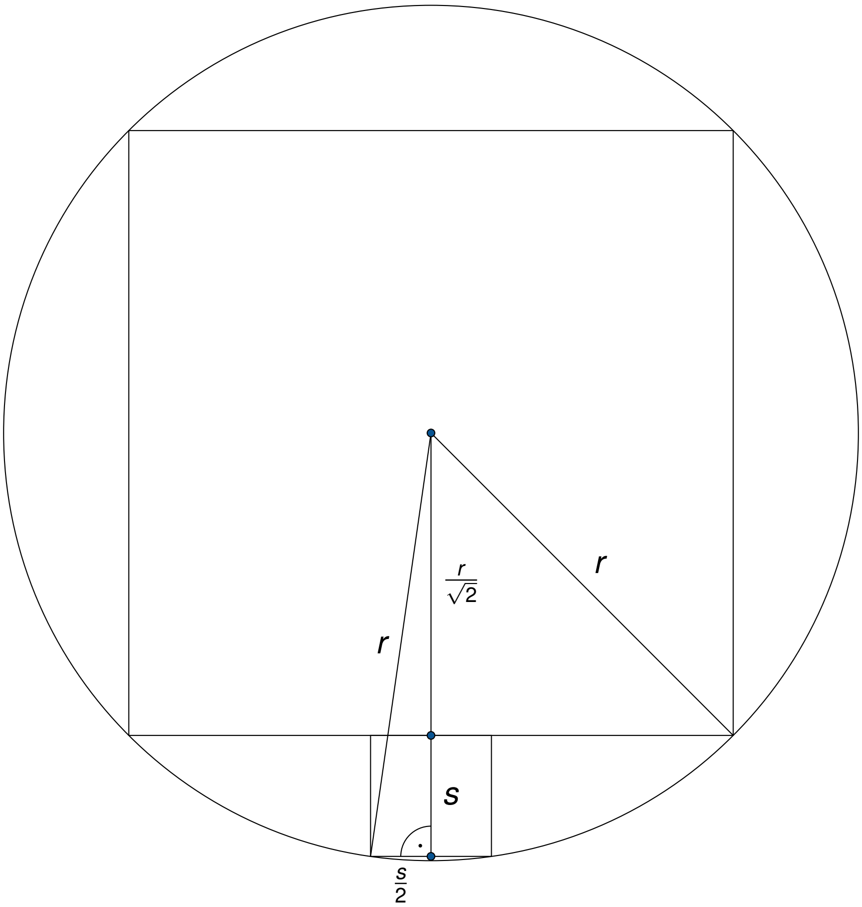
und somit $101a + 11b + 2c = 17$.
Also ist $a = 0$, $b = 1$ und $c = 3$.
Das Enkelkind wurde 2013 geboren und ist 6 Jahre alt.

Aufgabe E3



Gegeben ist ein Quadrat mit dem Umkreisradius r.
In einem der Kreisabschnitte ist ein Quadrat mit der Seite s eingezeichnet.
Berechnen Sie s in Abhängigkeit von r und das Verhältnis der beiden Quadratflächen.

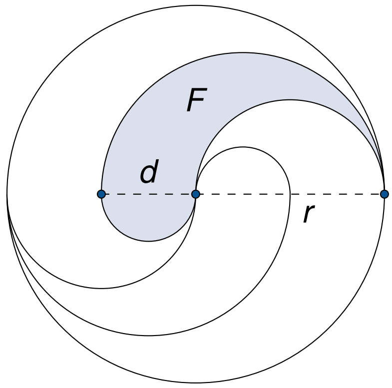
Lösung



Aus $\left(\frac{r}{\sqrt{2}}+s\right)^2+\left(\frac{s}{2}\right)^2=r^2$ folgt $5s^2+s\cdot 4r\sqrt{2}-2r^2=0$ und somit auch $(5s-r\sqrt{2})(s+r\sqrt{2})=0$.
Also ist $s=\frac{r\sqrt{2}}{5}$ und das gesuchte Verhältnis $\frac{2r^2}{s^2}=25$, d.h. das große Quadrat ist 25 mal so groß wie das kleine Quadrat.

Aufgabe E4

Gegeben ist ein Kreis mit Radius r und $d < r$. Der Kreis wird durch Halbkreise in vier Figuren unterteilt.



a) Berechnen Sie die Fläche F der grau hinterlegten Figur in Abhängigkeit von d und r.

b) Berechnen Sie das Verhältnis $\frac{r}{d}$, wenn die vier Figuren inhaltsgleich sind , d.h. wenn F ein Viertel der Kreisfläche ist.

Lösung

a) $F = \frac{\pi}{2}\left(\frac{d}{2}\right)^2 + \frac{\pi}{2}\left(\frac{d+r}{2}\right)^2 - \frac{\pi}{2}\left(\frac{r}{2}\right)^2 = \frac{\pi d}{4}(d+r)$.

b) Aus $\frac{\pi}{4}\left(d^2 + dr\right) = \frac{\pi}{4}r^2$ folgt $\left(\frac{r}{d}\right)^2 - \frac{r}{d} - 1 = 0$ und (wegen $\frac{r}{d} > 0$) $\frac{r}{d} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$.

Aufgabe H1

Schreiben Sie 2019 im 8er-System, d.h. berechnen Sie a,b,c und d in

$$2019_{10} = abcd_8.$$

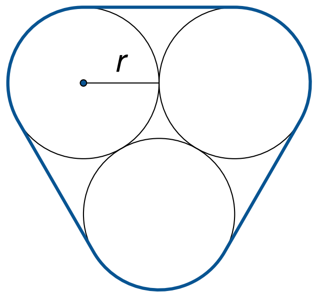
Lösung

$$\begin{aligned}
2019 &= 252 \cdot 8 + 3 \\
&= (31 \cdot 8 + 4) \cdot 8 + 3 \\
&= 31 \cdot 8^2 + 4 \cdot 8 + 3 \\
&= (3 \cdot 8 + 7) \cdot 8^2 + 4 \cdot 8 + 3 \\
&= 3 \cdot 8^3 + 7 \cdot 8^2 + 4 \cdot 8 + 3 \\
&= 3743_8
\end{aligned}$$

Zentrum für Mathematik · Werrastraße 26 · 64625 Bensheim · 06251-580306
Internet: www.z-f-m.de · Email: tdm@z-f-m.de

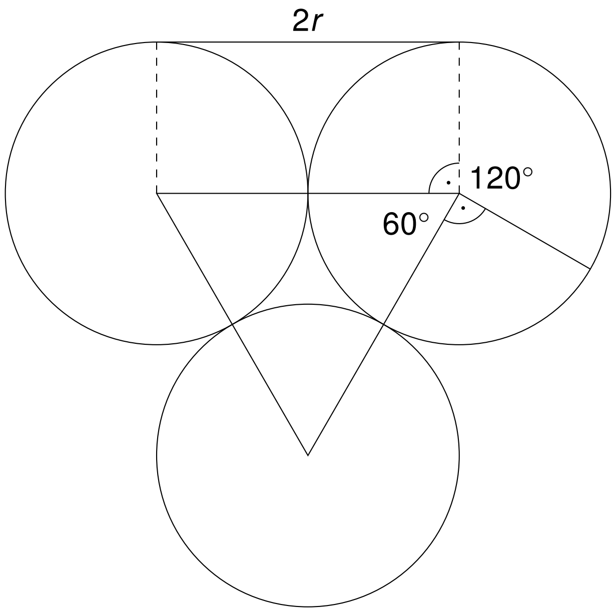
Aufgabe H2

Drei gleichgroße Röhren mit Radius r sollen durch eine Schnur zusammen gebunden werden.
Berechnen Sie die Länge s der Schnur.

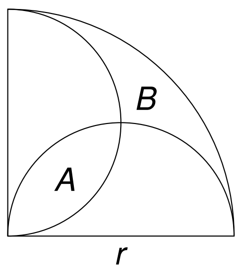


Lösung

$s = 3\left(2r + \frac{2\pi r}{3}\right) = 2r(3+\pi)$



Aufgabe H3



In einem Viertelkreis (Radius r) begrenzen zwei Halbkreise (Radius $\frac{r}{2}$) die Gebiete A und B.
Zeigen Sie, dass die Flächen gleich groß sind.

Lösung

$B = \frac{\pi r^2}{4} - \pi \left(\frac{r}{2}\right)^2 + A = A$

Aufgabe H4

In einer Schulklasse mit m Schülern und w Schülerinnen wird ein Test geschrieben. Dabei haben die Schüler einen Mittelwert von 70 Punkten und die Schülerinnen einen Mittelwert von 92 Punkten. Der Mittelwert der ganzen Klasse beträgt 86 Punkte.
Berechnen Sie $\frac{m}{w}$.

Lösung

Die m Schüler erreichten zusammen $70m$ Punkte.

Die w Schülerinnen erreichten zusammen $92w$ Punkte.

Die gesamte Klasse erhielt $86(m+w)$ Punkte.

Aus $70m + 92w = 86(m+w)$ folgt $\frac{m}{w} = \frac{3}{8}$.

Aufgabe H5

Für welche x bzw. y gilt

a) $\log \sqrt[3]{x} = \sqrt{\log x}$ (Zehnerlogarithmus)

b) $2^{2y+2} = 9 \cdot 2^y - 2$

Lösung

a) Aus $\log \sqrt[3]{x} = \sqrt{\log x}$
folgt $\frac{1}{3}\left(\sqrt{\log x}\right)^2 = \sqrt{\log x}$
und somit $\sqrt{\log x} = 3$ oder $\log x = 0$.
Also $x = 1$ oder $x = 10^9$.

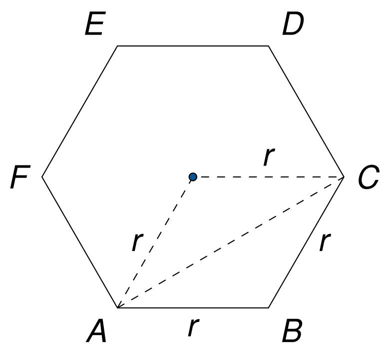
b) Aus $2^{2y+2} = 9 \cdot 2^y - 2$
folgt $4 \cdot (2^y)^2 = 9 \cdot 2^y - 2$
und somit $0 = 4(2^y)^2 - 9 \cdot 2^y + 2 = (4 \cdot 2^y - 1)(2^y - 2)$.
Also $2^y = 2$ oder $4 \cdot 2^y = 1$ und somit $y = 1$ oder $y = -2$.

Aufgabe H6

Gegeben ist ein regelmäßiges Sechseck *ABCDEF* im Koordinatensystem mit $A(0|0)$ und $C(7|1)$.
Berechnen Sie die Fläche des Sechsecks.

Lösung

Sei r die Seitenlänge des Sechsecks.
Dann ist $AC = r\sqrt{3}$.
Aus $AC^2 = 7^2 + 1^2 = 50 = (r\sqrt{3})^2$ folgt $r^2 = \frac{50}{3}$
und für die Fläche $6 \cdot \frac{r^2}{4}\sqrt{3} = 25\sqrt{3}$.



Aufgabe H7

Die $*$Verknüpfung von Paaren reeller Zahlen wird definiert durch

$$(a,b) * (c,d) = (ad + bc, bd)$$

Berechnen Sie $(1,2) * (3,4) * (5,6) * (7,8)$.

Lösung

$$(1,2) * (3,4) * (5,6) * (7,8) = (10,8) * (82,48) = (1136,384)$$

Deutet man die Zahlenpaare als Bruchzahlen, so ist die Verknüpfung die Addition von Brüchen:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{5}{6} + \frac{7}{8} &= \frac{4 \cdot 6 \cdot 8 + 3 \cdot 2 \cdot 6 \cdot 8 + 5 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 8 + 7 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 6}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} \\ &= \frac{1136}{384} \\ &= \frac{71}{24}. \end{aligned}$$

Tag der Mathematik 2019

Aufgabe H8

Aufgabe H8

Luisa hat einen fairen handelsüblichen Würfel. Damit würfelt sie so lange, bis die Augenzahl nicht mehr strikt fallend ist.

Beispiele:

- ⚅ ⚄ ⚃ ⚃ $\longrightarrow$ 4 Würfe,
- ⚂ ⚃ $\longrightarrow$ 2 Würfe,
- ⚄ ⚂ ⚁ ⚀ ⚅ $\longrightarrow$ 5 Würfe.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sie

- mindestens viermal würfelt,
- mindestens fünfmal würfelt,
- genau viermal würfelt.

$\geq 4\times$	$\geq 5\times$	$= 4\times$

Hinweis: Ein Bruch wie $\frac{16}{6^4}$ braucht nicht gekürzt zu werden.

Lösung:

Es gibt die folgenden 20 Möglichkeiten, drei absteigende Augenzahlen zu würfeln:

⚅⚄⚃, ⚅⚄⚂, ⚅⚄⚁, ⚅⚄⚀, ⚅⚃⚂, ⚅⚃⚁, ⚅⚃⚀,
⚅⚂⚁, ⚅⚂⚀, ⚅⚁⚀, ⚄⚃⚂, ⚄⚃⚁, ⚄⚃⚀, ⚄⚂⚁,
⚄⚂⚀, ⚄⚁⚀, ⚃⚂⚁, ⚃⚂⚀, ⚃⚁⚀, ⚂⚁⚀.

Also ergibt sich $\frac{20}{6^3} = \frac{5}{54}$.

Alternativ ergibt sich die Anzahl der Möglichkeiten auch daraus, auf wie viele Arten man drei Würfel aus ⚅⚄⚃⚂⚁⚀ auswählen kann. Die absteigend angeordneten Würfel sind dann mögliche Varianten. Somit ergeben sich

$$\binom{6}{3} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 20$$

Möglichkeiten.

Für vier absteigende Augenzahlen gibt es somit $\binom{6}{4} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 15$ Möglichkeiten. Die Wahrscheinlichkeit ist hier also $\frac{15}{6^4} = \frac{15}{1296} = \frac{5}{432}$.

Es gibt $\binom{6}{3} \cdot 6 - \binom{6}{4} = 120 - 15 = 105$ Möglichkeiten, bei vier Würfen drei absteigende Augenzahlen und dann eine nicht mehr absteigende Augenzahl zu würfeln. Es ergibt sich also als Wahrscheinlichkeit $\frac{105}{6^4} = \frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{6^4} = \frac{35}{432}$.

Per `sage/python`-Programm mit folgender Ausgabe:

- Anzahl der Würfe,
- Wahrscheinlichkeit für genau so viele Würfe,
- Wahrscheinlichkeit für mindestens so viele Würfe.

```
for i in range (1, 8):
  print i, (binomial (6, i-1) * 6 - binomial (6, i)) / 6^i, \
    binomial (6, i-1) / 6^(i-1)
```

```
1 0 1
2 7/12 1
3 35/108 5/12
4 35/432 5/54
5 7/648 5/432
6 35/46656 1/1296
7 1/46656 1/46656
```